Studio di funzione

R.Argiolas

Introduzione

Presentiamo lo studio del grafico di alcune funzioni svolte durante le esercitazioni del corso di analisi matematica I e assegnate nelle prove scritte.
Ringrazio anticipatamente tutti quelli che vorranno segnalarmi eventuali errori o consigli per migliorare il lavoro.

R.A.

Indice

Ricerca degli asintoti di una funzione

Asintoto verticale

Se al tendere di x a x_0 la funzione tende ad infinito, cioè se è verificata la condizione:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

la retta di equazione $x = x_0$ (retta parallela all'asse delle ordinate) è un asintoto della funzione detto **asintoto verticale**. La ricerca degli asintoti verticali si riconduce quindi a quella dei valori finiti che rendono infinita la funzione.

Osservazioni:

1. una funzione algebrica intera non presenta asintoti verticali,

2. una funzione algebrica razionale fratta ammette tanti asintoti verticali quanti sono gli zeri del suo denominatore,

3. una funzione algebrica irrazionale fratta ammette tanti asintoti verticali quanti sono gli zeri reali del suo denominatore appartenenti al dominio di tutti i radicali di indice pari,

4. le funzioni goniometriche ammettono infiniti asintoti verticali o nessuno,

5. la funzione esponenziale $a^{f(x)}$ ammette tanti asintoti verticali quanti sono i valori finiti della x che rendono infinita, positiva, la funzione f(x) se a>1, infinita negativa se 0<a<1,

6. la funzione logaritmica ammette tanti asintoti verticali quanti sono gli zeri reali della funzione e i valori finiti della x che rendono infinita la funzione.

Asintoto orizzontale

Se al tendere di x a ∞ la funzione tende ad un numero finito, cioè se è verificata la condizione:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$$

la retta di equazione $y = k$ (retta parallela all'asse delle ascisse) è un asintoto della funzione detto **asintoto orizzontale**.

Osservazioni:

1. una funzione algebrica intera non presenta asintoti orizzontali,

2. una funzione algebrica razionale fratta ammette asintoto orizzontale y=k (con k uguale al rapporto tra i coefficienti di grado massimo) quando il numeratore e il denominatore sono dello stesso grado, inoltre una funzione algebrica razionale fratta ammette per asintoto l'asse delle ascisse se il grado del denominatore è superiore al grado del numeratore.

Asintoto obliquo

Assegnata una funzione, si utilizza il calcolo dei limiti per determinare l'eventuale asintoto obliquo a tale funzione. Ricordiamo che un **asintoto obliquo** è una retta del tipo:

$$y = mx + q$$

tale che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (mx + q) \right] = 0$$

dove:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{deve esistere finito diverso da zero}$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx \right) \quad \text{deve esistere finito}$$

Osservazioni:

1. una funzione algebrica intera non presenta asintoti obliqui,

2. una funzione algebrica razionale fratta ammette un solo asintoto obliquo (che non potrà mai coesistere con l'asintoto orizzontale) solo quando il grado del numeratore supera di uno il grado del denominatore,

3. le funzioni irrazionali il cui campo di esistenza si estende all'infinito potranno anche aver più asintoti obliqui o asintoti orizzontali e obliqui.

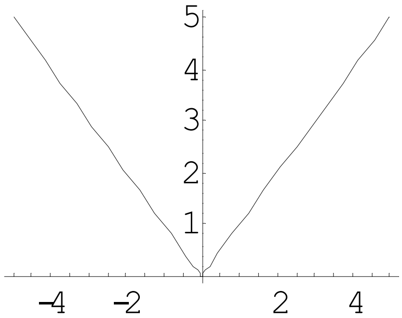
Punti di non derivabilità

Punti angolosi

Indicati con D e D' rispettivamente il dominio della funzione f(x) e della sua derivata $f'(x)$, se in un punto $x_0 \in D$ ma $x_0 \notin D'$, esistono finite e diverse la derivata sinistra $f'_-(x)$ e destra $f'_+(x)$, si dice che il grafico della funzione presenta nel punto un $P(x_0, f(x_0))$ **punto angoloso** (si può chiamare anche punto angoloso un punto per quale uno dei due limiti destro o sinistro del rapporto incrementale esista finito e l'altro infinito).

Esempio:

La funzione $f(x) = |x|$ presenta in x=0 un punto angoloso, infatti la funzione è definita su tutto l'asse reale mentre la sua derivata prima è definita ovunque tranne che nell'origine.
Grafico della funzione



$$f'(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

La derivata destra e sinistra sono diverse fra loro ma finite, infatti:

$$f'_+(0) = 1 \qquad\qquad f'_-(0) = -1$$

quindi l'origine è un punto di non derivabilità per la funzione assegnata e prende il nome di punto angoloso.

Cuspidi

Indicati con D e D' rispettivamente il dominio della funzione f(x) e della sua derivata $f'(x)$, se in un punto $x_0 \in D$, ma $x_0 \notin D'$, e inoltre

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty \qquad\qquad \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

il grafico della funzione presenta nel punto $P(x_0, f(x_0))$ una **cuspide**.

Esempio

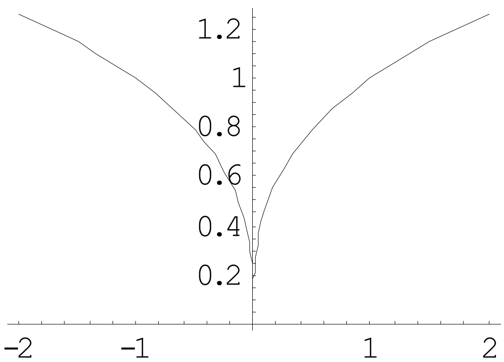
La funzione $f(x) = |x|^{\frac{1}{3}}$ presenta nell'origine un punto di cuspide, infatti è definita su tutta l'asse reale ed è ivi continua, ma la sua derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{3}|x|^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{x}{|x|}$$

non è definita nell'origine. In tale punto si ha:

$$f'_+(0) = +\infty \qquad f'_-(0) = -\infty$$

Grafico



Flesso a tangente verticale

Indicati con D e D' rispettivamente il dominio della funzione f(x) e della sua derivata $f'(x)$, se un punto $x_0 \in D$, ma $x_0 \notin D'$ e inoltre:

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = +\infty$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

allora si dice che il grafico della funzione presenta nel punto $P(x_0, f(x_0))$ un **flesso a tangente verticale.**

Esempio

La funzione $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ è definita su tutto l'asse reale ed è ivi continua ma presenta nell'origine un flesso a tangente verticale, infatti:

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

non è definita nell'origine. In tale punto si ha:

$$f'_+(0)=+\infty \qquad\qquad f'_-(0)=+\infty$$

Esercizio

Studiare la continuità e derivabilità della funzione:

$$y=\arccos\sqrt{|1-x^2|}$$

Svolgimento

La funzione è goniometrica irrazionale con indice pari.

Dominio:

$$C.E.=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$$

La funzione è continua in tutto il dominio di definizione.
Calcoliamo la derivata

$$y'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-|1-x^2|}}\,\frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}\,\frac{1-x^2}{|1-x^2|}=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} & -1<x<1\\[2ex] \dfrac{-x}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{2-x^2}} & x<-1 \quad x>1\end{cases}$$

è definita per $x\in\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$

Analizziamo il comportamento della derivata destra e sinistra nei punti di non derivabilità:

$$f'_+(0)=1 \qquad\qquad f'_-(0)=-1$$

In x=0 si ha un punto angoloso con tangenti rispettivamente di coefficiente angolare 1 e -1. Le equazioni delle rette tangenti sono y=x (tangente destra) e y=-x (tangente sinistra).
Inltre

$$f'_+(-1) = -\infty \qquad f'_-(-1) = +\infty$$

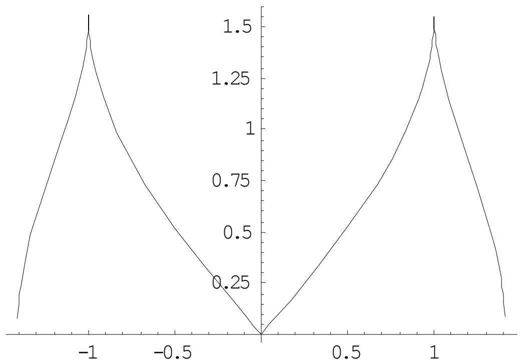
Quindi in x=-1 si ha un punto di cuspide.
Mentre in x=1 si ha

$$f'_+(1) = -\infty \qquad f'_-(1) = +\infty$$

Perciò in x=1 abbiamo un altro punto di cuspide.
Inoltre

$$f'_+\left(-\sqrt{2}\right) = +\infty \qquad f'_-\left(\sqrt{2}\right) = -\infty$$

Grafico



Teoremi sulle derivate

Il teorema di Lagrange

Data una funzione continua nell' intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a,b) esiste (almeno) un punto c tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Significato geometrico del teorema

Il teorema di Lagrange afferma che è sempre possibile determinare un punto appartenente all'intervallo considerato per il quale la retta tangente al grafico della funzione in quel punto è **parallela** alla retta congiungente gli estremi. Infatti la quantità:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

individua il coefficiente angolare della retta di estremi $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ mentre $f'(c)$ individua il coefficiente angolare della retta tangente (vedi significato geometrico di derivata di una funzione in un punto) nel punto $C(c, f(c))$ L'uguaglianza tra le due quantità è la ben nota condizione di parallelismo tra due rette.

Osservazione:

Il teorema afferma l'esistenza di almeno un punto c. Ciò equivale ad affermare non l'unicità di tale punto ma la possibilità che di punti che soddisfano tale condizione ve ne siano più di uno! Un punto però è sempre possibile determinarlo (purchè siano soddisfatte le ipotesi del teorema!!!)

Esempio

Dire se è applicabile il teorema di Lagrange alla funzione $y=|x|$ negli intervalli [-2,1] , [1,3], [0,1].

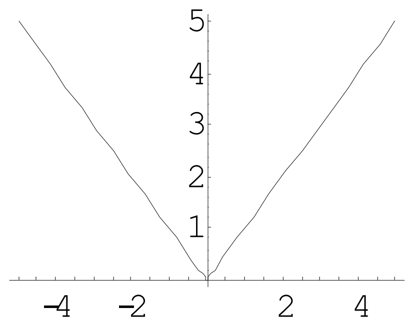
Svolgimento

1. La risposta è negativa nell'intervallo [-2,1]. Infatti la funzione assegnata non soddisfa le ipotesi del teorema, non è derivabile nel punto 0 che appartiene all'intervallo (-2,1), benché sia continua in tutto l'intervallo assegnato.

2. La risposta è positiva nell'intervallo [1,3], infatti in tale intervallo la funzione è continua e derivabile in qualsiasi punto.

3. La risposta è positiva nell'intervallo [0,1], infatti si osservi che benché la funzione non sia derivabile nel punto 0 questo non crea problemi perchè il teorema richiede come ipotesi la derivabilità nell'aperto e non negli estremi!

Grafico



Esercizio

Dire se è applicabile il teorema di Lagrange alla funzione:

$$y = \arctan\sqrt{|x-1|}$$

nell'intervallo $[-1,2]$.

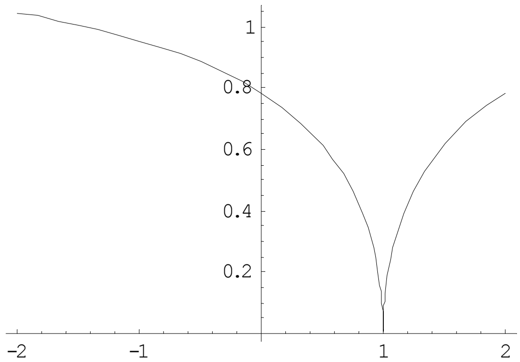
Svolgimento

La funzione assegnata è continua in tutto l'intervallo (chiuso), bisogna stabilire anche se è derivabile in tutto l'intervallo aperto, per far questo calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{1}{2(1+|x-1|)}\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\operatorname{sgn}(x-1)$$

Si vede con pochi calcoli che la funzione presenta un punto di cuspide (e quindi di non derivabilità) nel punto di ascissa x=1, pertanto nell'intervallo assegnato non è applicabile il teorema di Lagrange.

Grafico



Esercizi sullo studio di funzione

Nello studio di una funzione $f(x)$ è sempre meglio seguire uno scheda preordinato in modo poter utilizzare tutte le informazioni necessarie per poter tracciare un grafico della funzione il più accurato possibile. Lo schema che consigliamo è il seguente:

1. Determinare il campo di esistenza della funzione assegnata (questo è il punto più importante, determinare un errato campo di esistenza compromette l'intero

studio di funzione). A tal proposito, ricordiamo quanto già enunciato nella dispensa "funzioni reali di variabile reale e continuità":

Le funzioni elementari

Si dividono in due classi:

1. **Funzioni algebriche**

   Sono costituite da quelle funzioni dove il legame tra x e y è di tipo algebrico. Possono essere cosi suddivise:

   a) Funzioni **razionali intere**
   b) Funzioni **razionali fratte**
   c) Funzioni **irrazionali**

2. **Funzioni trascendenti**

   Sono costituite da quelle funzioni dove il legame tra x e y non è di tipo algebrico. Possono essere cosi suddivise:

   a) Funzioni **goniometriche**
   b) Funzioni **esponenziali**
   c) Funzioni **logaritmiche**

Dominio o campo di esistenza

Assegnata una funzione è necessario determinare l'insieme dei valori della variabile indipendente che definisce la funzione. Ricordiamo il dominio delle funzioni elementari.

1. Funzioni algebriche

a) Le funzioni razionali intere sono definite in tutto il campo reale

b) Le funzioni razionali fratte sono definite per tutti quei valori che NON annullano il denominatore

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \text{C.E.} = \{x \,/\, Q(x) \neq 0\}$$

c) Il dominio delle funzionali irrazionali dipende dall'indice della radice, distinguiamo quindi due casi.

- Se l'indice della radice è un numero pari il campo di esistenza è dato da tutti quei valori della x che rendono il radicando maggiore o uguale a zero.

$$f(x) = \sqrt[n]{Q(x)} \qquad \text{con indice pari} \qquad \text{C.E.} = \{x / Q(x) \geq 0\}$$

- Se l'indice è dispari, le funzioni irrazionali sono definite su tutto il campo reale.

$$f(x) = \sqrt[n]{Q(x)} \qquad \text{con indice dispari} \qquad \text{C.E.} = \Re .$$

2. Funzioni trascendenti

a) Le funzioni goniometriche come seno e coseno sono definite in tutto l'asse reale, mentre tangente e cotangente sono definite per tutti quei valori che non annullano il denominatore. Le funzioni inverse sono definite come segue:

$$f(x) = \arcsin x \qquad \text{C.E.: } \{x / |x| \leq 1\}$$

$$f(x) = \arccos x \qquad \text{C.E.: } \{x / |x| \leq 1\}$$

$$f(x) = \arctan x \qquad \text{C.E.: } \Re$$

$$f(x) = arc\cot x \qquad \text{C.E.: } \Re$$

b) Le funzioni esponenziali sono definite in tutto l'asse reale.

c) La funzione logaritmica è definita per tutti i valori della x che rendono l'argomento (del logaritmo) strettamente positivo.

$$f(x) = \log_a x \qquad \text{C.E.} = (0, +\infty)$$

2. Stabilire se vi sono eventuali simmetrie (rispetto all'origine, rispetto all'asse y o rispetto ad una retta generica, etc.).

Ricordiamo che:

Una funzione si dice "**pari**" (o simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) se

$$f(x) = f(-x) \qquad \forall x \in \text{C.E.}$$

Una funzione si dice "**dispari**" (o simmetrica rispetto all'origine) se

$$f(x) = -f(-x) \qquad \forall x \in \text{C.E.}$$

3. Determinare le eventuali intersezioni con gli assi.

4. Studiare il comportamento della funzione agli estremi del dominio di definizione, determinando quindi gli eventuali asintoti verticali, orizzontali e obliqui.

5. Se conviene, studiare il segno della funzione per stabile dove è positiva e dove è negativa (a seconda della funzione questo calcolo risulta complicato, conviene quindi non utilizzarlo sempre, ma solo quando è conveniente).

6. Studiare la derivata prima. Analizzare i punti di non derivabilità e successivamente studiare il segno della derivata per determinare eventuali punti di massimo e minimo.

7. Calcolare, quando è conveniente, la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso.

Concavità e convessità

Sia $f : I \to \Re$, dove I è un intervallo di numeri, una funzione continua due volte derivabile in I.
Diremo che:

- f è convessa in I se e solo se $f'' \geq 0$ in I
- f è concava in I se e solo se $f'' \leq 0$ in I

Test di monotonia

Sia $f : I \to \Re$, derivabile. Allora

$$f \quad crescente \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \geq 0 \qquad \forall x \in I$$

$$f \quad decrescente \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \leq 0 \qquad \forall x \in I .$$

ESERCIZI

Esercizio 1

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = xe^{-\frac{1}{|x|}}$$

Dire se è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo [-1,1].

svolgimento

Si tratta di una funzione esponenziale fratta.

Dominio

$$C.E. = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$$

Simmetrie
La funzione è dispari, infatti

$$-f(-x) = -(-x)e^{-\frac{1}{|-x|}} = f(x) \qquad \forall x \in C.E.$$

sarà quindi sufficiente studiarla solo nell'intervallo $(0,+\infty)$. Si osservi che nel dominio considerato il valore assoluto è superfluo!

Comportamento della funzione agli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{-\frac{1}{x}} = 0$$

Nel punto x=0 la funzione presenta una discontinuità eliminabile. Possiamo quindi prolungare con continuità la funzione ridefinendola come segue:

$$G(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{|x|}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} xe^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali.

Ricerca di eventuali asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

$$q = \lim_{x\to +\infty}(xe^{-\frac{1}{x}} - x) = \lim_{x\to +\infty} x(e^{-\frac{1}{x}} - 1)$$

poiché:

$$e^{-\frac{1}{x}} - 1 \approx -\frac{1}{x}$$

si ha:

$$q = \lim_{x \to +\infty} x(-\frac{1}{x}) = -1$$

quindi la retta y = x-1 è un asintoto obliquo per la funzione.

Derivata prima e ricerca dei punti di massimo e minimo

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

la derivata prima, nell'intervallo considerato, non si annulla mai ed è sempre positiva, la funzione quindi è sempre crescente. Si osservi inoltre che:

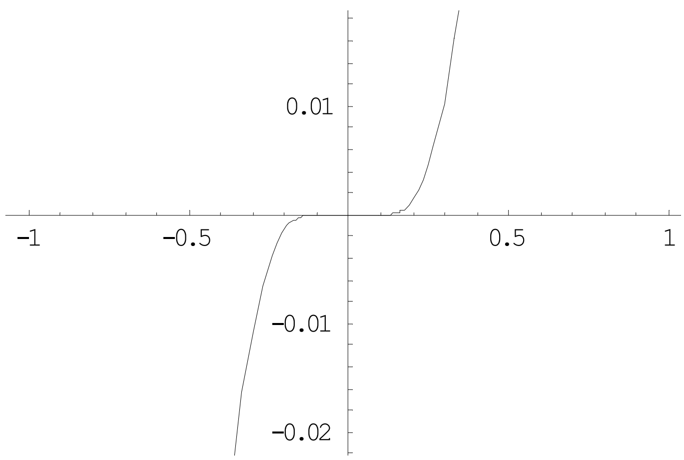
$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0^{\delta}$$

Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$$

La derivata seconda non si annulla mai in $(0,+\infty)$, inoltre poiché la funzione è sempre crescente in $(0,+\infty)$, la derivata seconda è sempre positiva in $(0,+\infty)$.

Grafico



a) Il teorema di Lagrange non è applicabile poiché la funzione non è continua nel punto x=0 (punto interno all'intervallo assegnato)

Esercizio 2

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{|x|}}$$

svolgimento

Si tratta di una funzione esponenziale fratta.

Dominio

$$C.E. = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$$

Simmetrie

La funzione è pari, infatti:

$$f(-x) = (-x)^2 e^{-\frac{1}{|-x|}} = f(x)$$

Sarà quindi sufficiente studiarla solo nell'intervallo $(0,+\infty)$.

Comportamento della funzione agli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

Il punto x=0 è una discontinuità eliminabile. Possiamo quindi prolungare con continuità la funzione ridefinendola come segue:

$$G(x) = \begin{cases} x^2 e^{-\frac{1}{|x|}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

Quindi non ci sono asintoti orizzontali.

Ricerca degli asintoti obliqui

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} x e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

non vi sono quindi asintoti obliqui (si ricordi che m deve esistere finito diverso da zero).

Derivata prima e ricerca dei punti di massimo e minimo

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}(2x+1)$$

La derivata prima, nell'intervallo considerato, cioè $(0,+\infty)$ non si annulla mai ed è sempre positiva, la funzione quindi è sempre crescente. Inoltre si osservi che:

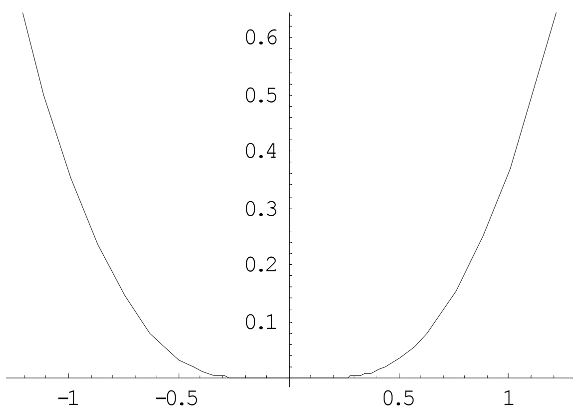
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}(2x+1) = 0$$

Derivata seconda

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{2x^2+2x+1}{x^2}\right)$$

La derivata seconda è sempre positiva (nell'intervallo considerato) essendo la funzione sempre crescente.

Grafico



Esercizio 3.

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x)=\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}+\arctan\sqrt{|x-1|}$$

svolgimento

Si tratta di una funzione goniometrica irrazionale (con indice pari).

Dominio

La funzione è definita su tutto l'asse reale

$$C.E.=(-\infty,+\infty)$$

Comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}+\arctan\sqrt{|x-1|}\right)=\pm\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali.

Ricerca di eventuali asintoti obliqui.

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}+\arctan\sqrt{|x-1|}}{x}=\frac{1}{4}$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}+\arctan\sqrt{|x-1|}-\frac{1}{4}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{\pi}{3}+\arctan\sqrt{|x-1|}\right)=\frac{\pi}{6}$$

quindi la retta $y=\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6}$ è un asintoto obliquo per la funzione.

Derivata prima e ricerca dei punti di massimo e minimo.

$$f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{1+|x-1|}\cdot\frac{1}{2\sqrt{|x-1|}}\cdot\frac{x-1}{|x-1|}=\begin{cases} f_1'(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}} & x>1 \\ f_2'(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}} & x<1 \end{cases}$$

Si osservi che il campo di definizione della derivata è differente da quello della funzione iniziale, infatti per la derivata abbiamo:

$$C.E.\text{ della derivata} = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$$

Studio dei punti di non derivabilità:

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$$

quindi nel punto di ascissa x=1 si ha una cuspide. Sostituendo x=1 nella funzione determiniamo il punto $P\left(1, \frac{1}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$.

Si osservi inoltre che $f_1'(x)$ è sempre positiva per x>1, mentre per $f_2'(x)$ si ha:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2-x}\frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{(2-x)\sqrt{1-x}-2}{4(2-x)\sqrt{1-x}} > 0 \quad\Rightarrow\quad (2-x)\sqrt{1-x} > 2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad (2-x)^2(1-x) > 4 \quad\Rightarrow\quad x(x^2-5x+8) < 0 \quad\Rightarrow\quad x < 0$$

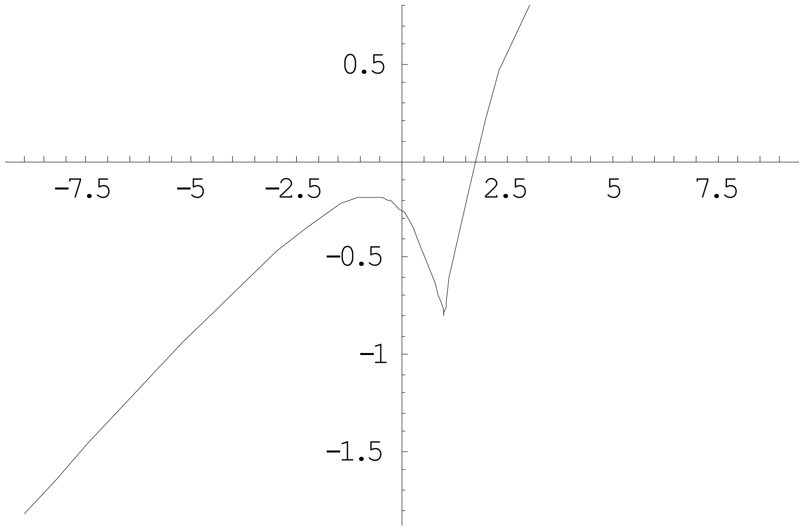
Il punto $Q\left(0, -\frac{\pi}{12}\right)$ è un punto di massimo per la funzione.

Derivata seconda

$$f''(x) = \begin{cases} f_1''(x) = \dfrac{1-3x}{4x^2(x-1)\sqrt{x-1}} & x > 1 \\[2ex] f_2''(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}\cdot\dfrac{4-3x}{4(1-x)\sqrt{1-x}} & x < 1 \end{cases}$$

Non ci sono punti di flesso.

Grafico



Esercizio 4

Studiare il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{3}{1 - \ln(x-2)}$$

Svolgimento

Si tratta di una funzione logaritmica fratta

Dominio

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 1 - \ln(x-2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \neq e + 2 \end{cases} \Rightarrow \quad C.E. = (2, e+2) \cup (e+2, +\infty)$$

Comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{1 - \ln(x-2)} = 0$$

In x=2 vi è un punto di arresto.
Inoltre

$$\lim_{x \to (e+2)^+} \frac{3}{1 - \ln(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to (e+2)^-} \frac{3}{1-\ln(x-2)} = +\infty$$

La retta x=2+e è un asintoto verticale.
infine

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{1-\ln(x-2)} = 0$$

La retta y=0 è un asintoto orizzontale, non vi sono asintoti obliqui.

Derivata prima e ricerca dei punti massimo e minimo

$$f'(x) = \frac{3}{(x-2)(1-\ln(x-2))^2}$$

si osservi che la derivata prima non si annulla mai, inoltre è positiva per:

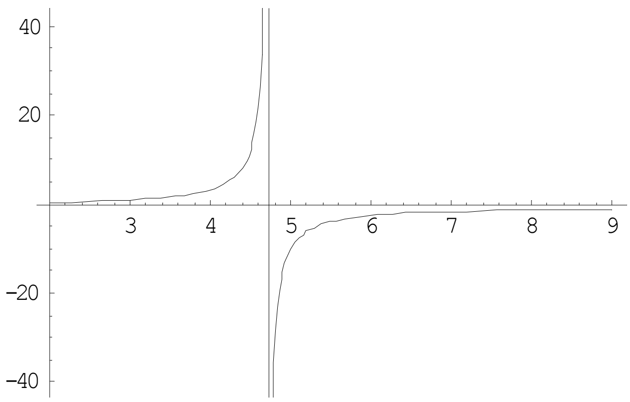
$$(x-2)(1-\ln(x-2))^2 > 0 \qquad \text{per} \quad \forall x \in C.E.$$

La funzione non presenta né massimi né minimi, ed è sempre crescente.

Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{3(1+\ln(x-2))}{(x-2)^2(1-\ln(x-2))^3}$$

Grafico



Esercizio 5

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \log\left(1 - \left|\frac{x}{x-1}\right|\right)$$

Svolgimento

Si tratta di una funzione logaritmica fratta

Dominio

$$1 - \left|\frac{x}{x-1}\right| > 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x}{x-1}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < |x-1| \quad \Rightarrow \quad x < \frac{1}{2}$$

inoltre $x - 1 \neq 0$

quindi:

$$C.E. = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$$

Comportamento agli estremi del dominio di definizione

Si osservi che:

$$f(x) = \log\left(1 - \left|\frac{x}{x-1}\right|\right) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{-1}{x-1}\right) & x \leq 0 \\ \\ \log\left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right) & 0 < x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

quindi:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) = -\infty$$

La retta $x = \dfrac{1}{2}$ è un asintoto verticale (destro) per la funzione

Inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{-1}{x-1}\right) = -\infty$$

Non vi sono asintoti orizzontali

Ricerca di eventuali asintoti obliqui.

Non vi sono asintoti obliqui, infatti:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\log\left(\frac{-1}{x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\log(1-x)}{x}=0$$

(m deve esistere finito diverso da zero)
Derivata prima e ricerca dei massimi e minimi

$$f'(x)=\frac{1}{1-\left|\frac{x}{x-1}\right|}\,\frac{1}{(x-1)^2}\,\frac{\frac{x}{x-1}}{\left|\frac{x}{x-1}\right|}=\begin{cases}\dfrac{-1}{x-1} & x<0\\[2ex] \dfrac{-1}{(2x-1)(x-1)} & 0<x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Si osservi che il campo di esistenza della derivata è differente da quello della funzione assegnata, infatti si ha:

$$C.E.\ \text{ della derivata: } (-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

Determiniamo quindi gli eventuali punti di non derivabilità:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{(2x-1)(x-1)}=-1$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{(x-1)}=1$$

In x=0 la funzione presenta un punto angoloso. In corrispondenza di tale punto si hanno due rette tangenti al grafico della funzione, y=-x (retta tangente destra) e y=x (retta tangente sinistra).
Inoltre

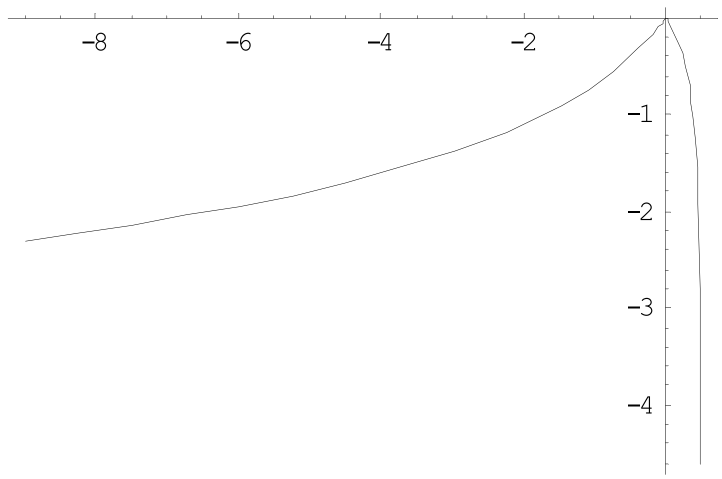
$$f'(x)>0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases}1-\left|\dfrac{x}{x-1}\right|>0\\[2ex] \dfrac{x}{x-1}>0\end{cases} \qquad x<0$$

quindi la funzione è crescente per x<0, decrescente in 0<x<1/2.

Derivata seconda

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2} & x < 0 \\ \\ \dfrac{4x-3}{(2x-1)^2(x-1)^2} & 0 < x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Si verifica facilmente che non ci sono punti di flesso.
Grafico:



Esercizio 6.

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{5}} e^{-(x+1)}$$

Svolgimento

Si tratta di una funzione esponenziale irrazionale (con indice dispari)

Dominio:

$$C.E. = (-\infty, +\infty)$$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 1)^{\frac{1}{5}} e^{-(x+1)} = 0 \qquad \text{(per la gerarchia degli infiniti)}$$

La retta y=0 è un asintoto orizzontale destro, mentre

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 1)^{\frac{1}{5}} e^{-(x+1)} = +\infty$$

quindi non vi è asintoto orizzontale sinistro.

Ricerca di eventuali asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2 - 1)^{\frac{1}{5}} e^{-(x+1)}}{x} = +\infty$$

Non ci sono asintoti obliqui.

Derivata prima e ricerca di eventuali punti di massimo e minimo:

$$f'(x) = -\frac{5x^2 - 2x - 5}{5(x^2 - 1)^{\frac{4}{5}}} e^{-(x+1)}$$

campo di esistenza della derivata:

$$C.E. = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

studio dei punti di non derivabilità:

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty$$

nei punti di ascissa $x = \pm 1$ il grafico della funzione presenta dei flessi a tangente verticale.

Si osservi inoltre che:

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 - 2x - 5 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - \sqrt{26}}{5} < x < \frac{1 + \sqrt{26}}{5}$$

la funzione presenta nei punti di ascissa $x = \frac{1 - \sqrt{26}}{5}$ e $x = \frac{1 + \sqrt{26}}{5}$, rispettivamente, un minimo e un massimo.

Grafico (lasciato al lettore come esercizio con il calcolo della derivata seconda)

Esercizio 7.

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = xe^{\frac{x+4}{x-2}}$$

svolgimento

Si tratta di una funzione esponenziale fratta

Dominio:

$$C.E. = (-\infty,2) \cup (2,+\infty)$$

Comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to 2^+} xe^{\frac{x+4}{x-2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} xe^{\frac{x+4}{x-2}} = 0$$

la retta x=2 è un asintoto verticale destro per la funzione

Si osservi che:

$$xe^{\frac{x+4}{x-2}} \sim xe \quad \text{per } x \to \pm\infty$$

quindi

$$\lim_{x\to -\infty} xe^{\frac{x+4}{x-2}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} xe^{\frac{x+4}{x-2}} = +\infty$$

Perciò non ci sono asintoti orizzontali

Ricerca di eventuali asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{xe^{\frac{x+4}{x-2}}}{x} = e \qquad\qquad m = \lim_{x\to +\infty} \frac{xe^{\frac{x+4}{x-2}}}{x} = e$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{\frac{x+4}{x-2}}-ex\right)=\lim_{x\to-\infty}xe\left(e^{\frac{x+4}{x-2}-1}-1\right)$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{x+4}{x-2}}-ex\right)=\lim_{x\to+\infty}xe\left(e^{\frac{x+4}{x-2}-1}-1\right)$$

si osservi che:

$$\left(e^{\frac{x+4}{x-2}-1}-1\right)\sim\frac{6}{x-2}\quad \text{per } x\to\pm\infty$$

quindi:

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}xe\left(e^{\frac{x+4}{x-2}-1}-1\right)=\lim_{x\to\pm\infty}xe\frac{6}{x-2}=6e$$

abbiamo il seguente asintoto obliquo: y=ex+6e

Derivata prima e ricerca dei punti di massimo e minimo:

$$f'(x)=e^{\frac{x+4}{x-2}}\left(1-\frac{6x}{(x-2)^2}\right)=\frac{x^2-10x+4}{(x-2)^2}e^{\frac{x+4}{x-2}}$$

Si osservi che il campo di esistenza della derivata è lo stesso della funzione iniziale, non vi sono quindi punti di non derivabilità.

Inoltre:

$$f'(x)>0 \quad\Rightarrow\quad x^2-10x+4>0 \quad\Rightarrow\quad x<5-\sqrt{21},\quad x>5+\sqrt{21}$$

abbiamo in corrispondenza dei punti $x=5-\sqrt{21}$ e $x=5+\sqrt{21}$, rispettivamente, un punto di massimo e uno di minimo.

Derivata seconda

$$f''(x)=\frac{60x-48}{(x-2)^4}e^{\frac{x+4}{x-2}}$$

Annullando la derivata seconda si trova il punto di flesso per $F\left(\frac{4}{5},\frac{4}{5}e^{-4}\right)$.

Grafico (lasciato al lettore come esercizio)

Esercizio 8.

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \log x$$

svolgimento

Si tratta di una funzione logaritmica irrazionale (con indice dispari).

Dominio:

$$C.E. = (0, +\infty)$$

Comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{2}{3}} \log x = [0 \cdot \infty] = \text{posto } (y = \frac{1}{x}) = \lim_{y \to +\infty} \frac{-\log y}{y^{\frac{2}{3}}} = 0 \quad \text{(dalla gerarchia degli infiniti)}$$

In x=0 si ha una discontinuità di terza specie (eliminabile). Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{2}{3}} \log x = +\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali.

Ricerca di eventuali asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} \log x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^{\frac{1}{3}}} = 0$$

non ci sono asintoti obliqui.

Derivata prima e ricerca dei punti di massimo e minimi

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}} (2 \log x + 3)$$

Risulta

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \log x + 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > e^{-\frac{3}{2}}$$

nel punto di ascissa $x = e^{-\frac{3}{2}}$ la funzione presenta un minimo.

Inoltre si osservi che:

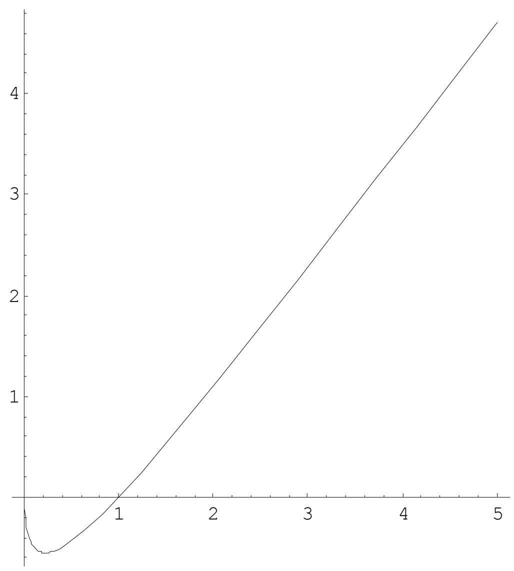
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}} (2\log x + 3) = -\infty$$

Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{1}{9} x^{-\frac{4}{3}} (-2\log x + 3)$$

Annullando la derivata seconda si trova il punto di flesso $F\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e\right)$.

Grafico:



Esercizio 9

Studiare la seguente frunzione:

$$f(x) = |x-2| e^{\arctan(x-2)}$$

Svolgimento

La funzione è goniometrica.

Dominio

$$C.E. = (-\infty, +\infty)$$

Si osservi che operando la traslazione X=x-2 la funzione assume la forma:

$$g(x)=f(X+2)=|x|e^{\arctan x}$$

Comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{\arctan x}=+\infty \qquad -\lim_{x\to-\infty} xe^{\arctan x}=-\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali.

Ricerca degli eventuali asintoti obliqui

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\arctan x}}{x}=\lim_{x\to+\infty} e^{\arctan x}=e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\arctan x}-e^{\frac{\pi}{2}}x\right)=\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-\frac{\pi}{2}+\arctan x}-1\right)=[0\cdot\infty]\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}e^{\arctan x}=-e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{-xe^{\arctan x}}{x}=-\lim_{x\to+\infty} e^{\arctan x}=-e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}\left(-xe^{\arctan x}+e^{-\frac{\pi}{2}}x\right)=\lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{\pi}{2}}\left(-e^{-\frac{\pi}{2}+\arctan x}+1\right)=[0\cdot\infty]\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1+x^2}e^{\arctan x}=e^{-\frac{\pi}{2}}$$

abbiamo quindi l'asintoto obliquo $y=e^{\frac{\pi}{2}}(x-1)$ per $x\to+\infty$ e $y=-e^{-\frac{\pi}{2}}(x-1)$ per $x\to-\infty$.

Derivata prima e eventuali punti di massimo e minimo

La derivata non è definita in x=0, analizziamo la natura di questo punto di non derivabilità:

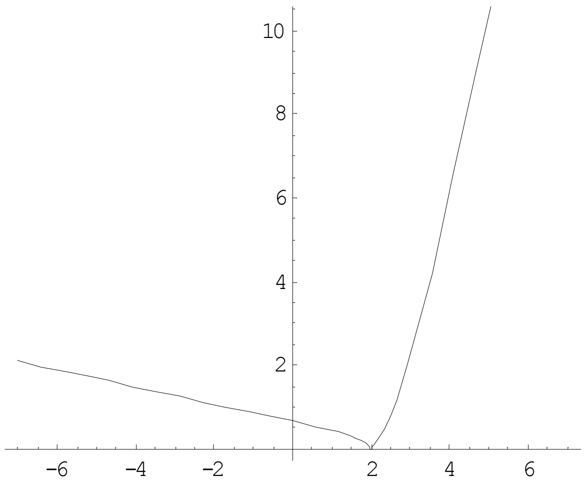
$$g'(x)=e^{\arctan x}\left(\frac{x}{|x|}+\frac{|x|}{1+x^2}\right)=\begin{cases} e^{\arctan x}\left(\dfrac{x+1+x^2}{1+x^2}\right) & x>0\\[2ex] -e^{\arctan x}\left(\dfrac{x+1+x^2}{1+x^2}\right) & x<0\end{cases}$$

La derivata non è definita in x=0, analizziamo la natura di questo punto di non derivabilità:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\arctan x}\left(\frac{x+1+x^2}{1+x^2}\right)=1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0^-} e^{\arctan x}\left(-\frac{x+1+x^2}{1+x^2}\right)=-1$$

abbiamo qundi un punto angoloso di ascissa x=0.
Si osservi inoltre che la derivata prima non si annulla mai, e la funzione è sempre crescente per $x \geq 0$ e decrescente per x<0.

Grafico:



Esercizio 10.

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = x + 2 - 3\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

Svolgimento

Si tratta di una funzione goniometrica fratta

Dominio

Si osservi che il denominatore della frazione è sempre diverso da zero, deve risultare:

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| \leq 1 \quad\Rightarrow\quad \left|x^2-1\right| \leq x^2+1 \quad\Rightarrow\quad x^2 \geq 0 \quad (\text{tranne x} = 0)$$

quindi

$$C.E. = (-\infty, +\infty)$$

Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x + 2 - 3\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right) = \pm\infty$$

Non vi sono asintoti orizzontali.

Ricerca di eventuali asintoti obliqui

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x + 2 - 3\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x + 2 - 3\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) - x\right) = 2 - \frac{3\pi}{2}$$

abbiamo determinato l'asintoto obliquo di equazione:

$$y = x + 2 - \frac{3\pi}{2}$$

Derivata prima e ricerca dei massimi e minimi:

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}}\cdot\frac{4x}{(x^2+1)^2} = 1 - \frac{6x}{|x|(x^2+1)} = \begin{cases} \dfrac{x^2+7}{x^2+1} & x<0 \\[2ex] \dfrac{x^2-5}{x^2+1} & x>0 \end{cases}$$

si osservi che il campo di definizione della derivata è differente dal campo di definizione della funzione iniziale, per la derivata si ha:

$$C.E. = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Studiamo quindi la derivata sinistra nel punto zero:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 7 \qquad\qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -5$$

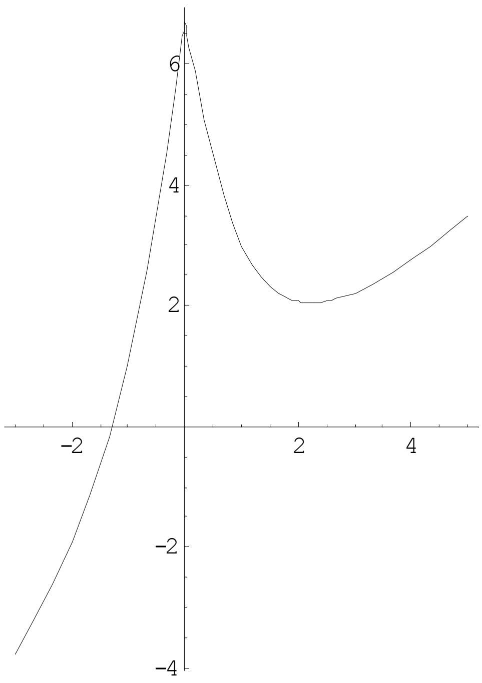
Nell'origine si presenta un punto angoloso

Studiando il segno della deriva prima si determina un punto di minimo con ascissa $x = \sqrt{5}$.

Derivata seconda

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-12x}{\left(x^2+1\right)^2} & x < 0 \\ \\ \dfrac{12x}{\left(x^2+1\right)^2} & x > 0 \end{cases}$$

Grafico:



Esercizio 11.

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|+1}{|x|-1}\right)$$

Svolgimento

Si tratta di una funzione goniometrica fratta

Dominio

Posto $|x|-1\neq 0$, da cui segue che:

$$C.E.=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

Comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to\pm\infty}\arctan\left(\frac{|x|+1}{|x|-1}\right)=\frac{\pi}{4}$$

La retta $y=\dfrac{\pi}{4}$ un asintoto orizzontale.
Inoltre

$$\lim_{x\to-1^-}\arctan\left(\frac{|x|+1}{|x|-1}\right)=\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-1^+}\arctan\left(\frac{|x|+1}{|x|-1}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

Perciò nel punto x=-1 si ha una dicontinuità di prima specie.
Infine

$$\lim_{x\to1^-}\arctan\left(\frac{|x|+1}{|x|-1}\right)=-\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to1^+}\arctan\left(\frac{|x|+1}{|x|-1}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Nel punto x=1 si ha una dicontinuità di prima specie.

Derivata prima e ricerca dei punti di massimo e minimo

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{|x|+1}{|x|-1}\right)^2}\cdot\frac{\dfrac{x}{|x|}(|x|-1)-\dfrac{x}{|x|}(|x|+1)}{(|x|-1)^2}=-\frac{x}{|x|(1+x^2)}$$

Si osservi che il dominio della derivata è differente dal dominio della funzione assegnata.
La derivata ha il seguente dominio:

$$C.E.=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$$

Studiamo quindi il comportamento della derivata in x=0

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x}{|x|(1+x^2)}\right)=-1 \qquad \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{x}{|x|(1+x^2)}\right)=1$$

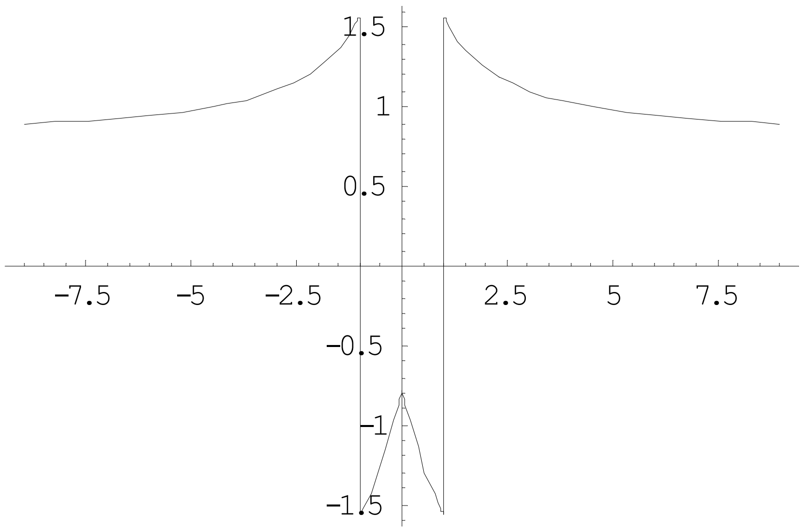
ne deduciamo che nel punto x=0 si ha un punto angoloso.

Si osservi inoltre che la funzione è sempre decrescente per x>0, mentre è crescente per x<0.

Derivata seconda

$$f'(x)=-\frac{|x|}{(1+x^2)^2}$$

Grafico:



Esercizio 12.

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x)=\log(\log(1-x))$$

Svolgimento

Si tratta di una funzione logaritmica

Dominio

$$\begin{cases} 1-x>0 \\ \\ \log(1-x)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ \\ 1-x>1 \end{cases} \Rightarrow \quad x<0$$

Quindi

$$C.E. = (-\infty, 0)$$

Comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 0^-} \log(\log(1-x)) = -\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali.

La retta x=0 è un asintoto verticale destro.
Inoltre

$$\lim_{x\to -\infty} \log(\log(1-x)) = +\infty$$

Ricerca di eventuali asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{\log(\log(1-x))}{x} = \text{ (posto } y = \log(1-x) = \lim_{y\to -\infty} \frac{\log(y)}{1-e^y} = 0$$

Non ci sono asintoti obliqui.

Derivata prima e ricerca dei punti di massimo e minimo

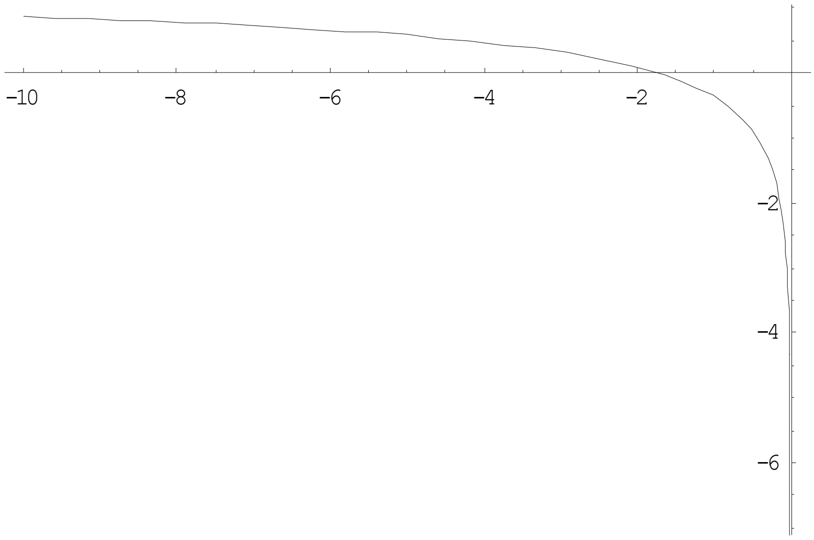
$$f'(x) = \frac{1}{\log(1-x)} \cdot \frac{-1}{1-x}$$

La deriva prima non si annulla mai nel dominio di definizione, inoltre è sempre negativa, quindi la funzione è sempre decrescente.

Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{1-\log(1-x)}{(1-x)^2 \log^2(1-x)}$$

Grafico



Esercizio 13.

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^3} \cdot \log(x-2)$$

Svolgimento

La funzione è logaritmica irrazionale

Dominio

$$\begin{cases} (x-2)^3 > 0 \\ \\ x-2>0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x>2$$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x\to 2^+}\sqrt{(x-2)^3} \cdot \log(x-2) = (\text{posto } y = \frac{1}{x-2}) = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}(-\log y) = 0$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{(x-2)^3} \cdot \log(x-2) = +\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali.
Ricerca di eventuali asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{(x-2)^3} \cdot \log(x-2)}{x} = +\infty$$

Derivata prima e ricerca dei punti di massimo e minimo

$$f'(x) = (x-2)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{3}{2} \log(x-2) + 1 \right]$$

Si ha:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{3}{2} \log(x-2) + 1 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \mathrm{x} = 2 + e^{-\frac{2}{3}}$$

Inoltre:

$$\lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} (x-2)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{3}{2} \log(x-2) + 1 \right] = 0$$

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{3}{2} \log(x-2) + 4 \right]$$

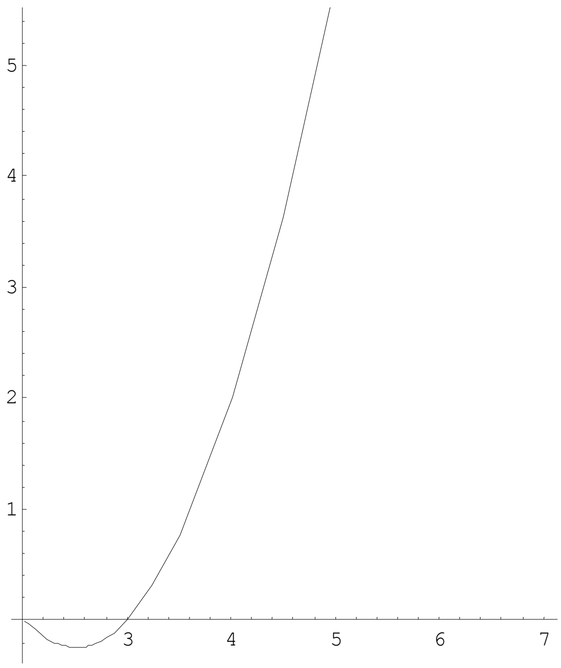
Si ha:

$$f''(2 + e^{-\frac{2}{3}}) = \frac{3}{2} e^{\frac{1}{3}} > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 + e^{-\frac{2}{3}} \text{ ascissa del punto di minimo.}$$

Si osservi che il punto x=2 va escluso in quanto non appartiene al campo di esistenza.
Annullando la derivata seconda si trova il punto di flesso $F\left(2 + e^{-\frac{8}{3}}, -\frac{8}{3} e^{-4} \right)$

Inoltre la funzione è crescente per $x > 2 + e^{-\frac{2}{3}}$, mentre per $2 < x \le 2 + e^{-\frac{2}{3}}$ la funzione è decrescente.

Grafico



Esercizio 14.

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = xe^{\frac{2x+1}{x-1}}$$

svolgimento

Si tratta di una funzione esponenziale fratta

Dominio:

$$C.E. = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$$

Comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to 1^-} xe^{\frac{2x+1}{x-1}} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} xe^{\frac{2x+1}{x-1}} = +\infty$$

la retta x=1 è un asintoto verticale sinistro per la funzione

Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{2x+1}{x-1}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{2x+1}{x-1}} = +\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali

Ricerca di eventuali asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{\frac{2x+1}{x-1}}}{x} = e^2 \qquad m = \lim_{x-+\infty} \frac{xe^{\frac{2x+1}{x-1}}}{x} = e^2$$

$$q = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{2x+1}{x-1}} - e^2 x \right) = \lim_{x\to+\infty} xe^2\left(e^{\frac{2x+1}{x-1}-2} - 1 \right)$$

$$q = \lim_{x\to-\infty}\left(xe^{\frac{x+4}{x-2}} - e^2 x \right) = \lim_{x\to-\infty} xe^2\left(e^{\frac{2x+1}{x-1}-2} - 1 \right)$$

si osservi che:

$$\left(e^{\frac{2x+1}{x-1}-2} - 1 \right) \sim \frac{3}{x-1} \qquad \text{per} \quad x \to \pm\infty$$

quindi:

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} xe^2\left(e^{\frac{2x+1}{x-1}-2} - 1 \right) = \lim_{x\to\pm\infty} xe^2\left(\frac{3}{x-1} \right) = 3e^2$$

abbiamo il seguente asintoto obliquo: $y = e^2(x+3)$

Derivata e ricerca dei punti di massimo e minimo:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{(x-1)^2} e^{\frac{2x+1}{x-1}}$$

Si osservi che il campo di esistenza della derivata è lo stesso della funzione iniziale, non vi sono quindi punti di non derivabilità.

Inoltre:

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 1 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad x < \frac{5-\sqrt{21}}{2}, \quad x > \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

abbiamo in corrispondenza dei punti $x < \frac{5-\sqrt{21}}{2}$ e $x > \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, rispettivamente, un punto di massimo e uno di minimo.

Grafico: (lasciato al lettore come esercizio insieme al calcolo della derivata seconda)

Esercizio 15

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2-2}{|x-4|}\right)$$

Svolgimento

Si tratta di una funzione logaritmica fratta.

Dominio:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-2}{|x-4|} > 0 \\ \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2>0 \\ \\ \mathrm{x} \neq 4 \end{cases} \Rightarrow C.E. = \left(-\infty,-\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2},4\right) \cup \left(4,+\infty\right)$$

Comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}^-} \log\left(\frac{x^2-2}{|x-4|}\right) = -\infty \qquad \lim_{x\to\sqrt{2}^+} \log\left(\frac{x^2-2}{|x-4|}\right) = -\infty$$

La retta $x=-\sqrt{2}$ un asintoto verticale (sinistro), mentre la retta $x=\sqrt{2}$ un asintoto verticale (destro). Inoltre

$$\lim_{x\to4^-} \log\left(\frac{x^2-2}{|x-4|}\right) = +\infty \qquad \lim_{x\to4^+} \log\left(\frac{x^2-2}{|x-4|}\right) = +\infty$$

La retta $x=4$ un asintoto verticale
Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty}\log\left(\frac{x^2-2}{|x-4|}\right)=+\infty$$

perciò non vi sono asintoti orizzontali.

Ricerca di eventuali asintoti obliqui

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\log\left(\frac{x^2-2}{4-x}\right)=0 \qquad\qquad m=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log\left(\frac{x^2-2}{x-4}\right)=0$$

Infatti:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\log\left(\frac{x^2-2}{4-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\log x+\log\left(1-\frac{2}{x^2}\right)-\log 4-\log\left(1-\frac{x}{4}\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\log\left(-\frac{x}{4}\right)}{x}=0$$

Non vi sono asintoti obliqui.

Derivata prima e ricerca dei massimi e minimi

$$f'(x)=\frac{x^2-8x+2}{(x-4)(x^2-2)}$$

Si osservi che $f'(x)>0$ quando:

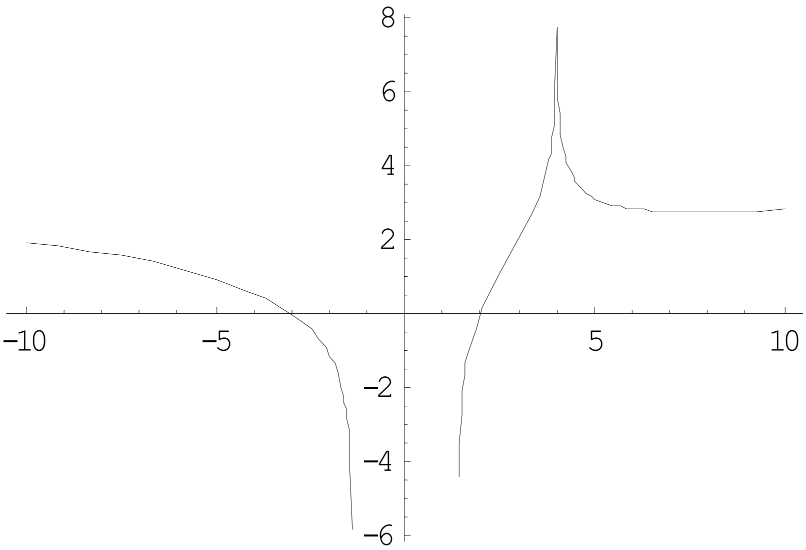
$$\frac{x^2-8x+2}{(x-4)(x^2-2)}>0 \quad\Rightarrow\quad \forall x\in\left(4+\sqrt{14},+\infty\right)$$

(nella risoluzione della disequazione si è tenuto conto anche del campo di definizione della funzione)

La funzione presenta un minimo in $x=4+\sqrt{14}$.

Lasciamo al lettore lo studio della derivata seconda.

Grafico:



Esercizio 16

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \log\left(\frac{4}{3-x}\right)$$

Svolgimento

Si tratta di una funzione logaritmica fratta.

Dominio:

$$\left(\frac{4}{3-x}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 3$$

quindi:

$$C.E. = (-\infty, 3)$$

Simmetrie

Non vi sono simmetrie

Comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to 3^-} \log\left(\frac{4}{3-x}\right) = \log\left(\lim_{x \to 3^-}\left(\frac{4}{3-x}\right)\right) = +\infty$$

La retta x=3 è un asintoto verticale (sinistro) per la funzione.
Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty}\log\left(\frac{4}{3-x}\right)=\log\left(\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3-x}\right)\right)=-\infty$$

quindi non vi sono asintoti orizzontali

Ricerca di eventuali asintoti obliqui

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\log\left(\frac{4}{3-x}\right)=0 \qquad \text{(dalla gerarchia degli infiniti)}$$

non vi sono asintoti obliqui.

Derivata prima ricerca dei punti di massimo e minimo

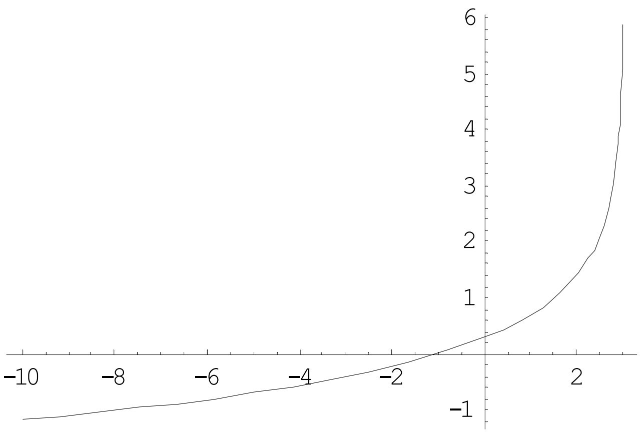
$$f'(x)=\frac{1}{3-x}$$

La derivata prima non si annulla mai, inoltre è sempre positiva nel dominio considerato, quindi la funzione è sempre crescente.

Derivata seconda

$$f''(x)=\frac{1}{(3-x)^2}$$

Grafico



Esercizio 17.

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \log\left(\frac{3x}{x-1}\right)$$

Si tratta di una funzione logaritmica fratta

Dominio:

$$\frac{3x}{x-1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ \\ x > 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x < 0 \qquad x > 1$$

quindi:

$$C.E. = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

Simmetrie

La funzione non presenta simmetrie.

Comportamento della funzione agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 0^-} \log\left(\frac{3x}{x-1}\right) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \log\left(\frac{3x}{x-1}\right) = +\infty$$

La retta di equazione x=0 è un asintoto verticale sinistro mentre la retta x=1 è un asintoto verticale destro.
Inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{3x}{x-1}\right) = \log 3 \qquad \lim_{x \to +\infty} \log\left(\frac{3x}{x-1}\right) = \log 3$$

La retta y=log 3 è un asintoto orizzontale per la nostra funzione (non vi sono quindi asintoti obliqui).

Derivata prima e ricerca dei massimi e minimi

$$f'(x) = -\frac{1}{x(x-1)}$$

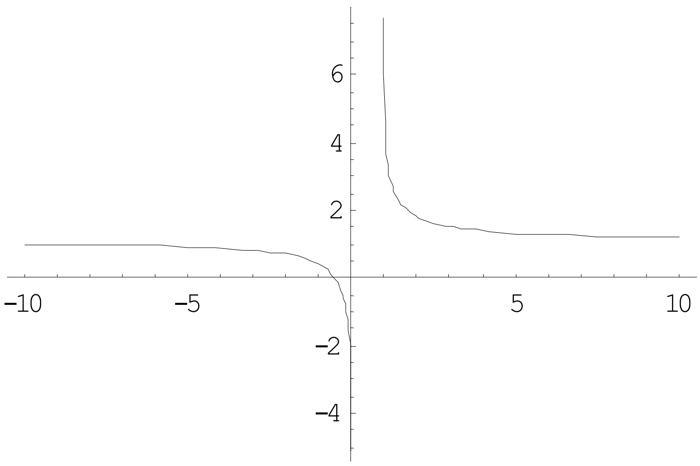
La derivata prima non si annulla mai. Inoltre è sempre positiva nel dominio di definizione, quindi la funzione è sempre decrescente.

Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

E' facile verificare che la funzione non presenta flessi.

Grafico:



Esercizio 18

Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}}$$

Si tratta di una funzione esponenziale irrazionale (con indice pari) e fratta.

Dominio:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}-1 \neq 0 \\ \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \quad \text{quindi:} \quad C.E. = [-1,0) \cup (0,+\infty)$$

Simmetrie

la funzione non presenta simmetrie.

Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}} = 0$$

Nel punto x=0 la funzione presenta una discontinuità di seconda specie, inotre la retta di equazione x=0 è un asintoto verticale (sinistro) per la funzione.
Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}} = 1$$

la retta y=1 è un asintoto orizzontale per la funzione. Non vi sono quindi asintoti obliqui.
Inoltre si osservi che:

$$f(-1) = e^{-1}$$

Derivata prima e ricerca dei massimi e minimi

$$f'(x) = -\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2\sqrt{x+1}}\, e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}}$$

La derivata non si annulla mai, inoltre è sempre negativa nel dominio di definizione, quindi la funzione è sempre decrescente. Si osservi anche che il campo di definizione della derivata è differente dal campo di esistenza della funzione f(x) , infatti la derivata non è definita nel punto di ascissa x=-1. Studiamo quindi il comportamento della derivata prima in tale punto:

$$\lim_{x\to -1^+}\left(-\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2\sqrt{x+1}}\, e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}}\right) = -\infty$$

Grafico (lasciato al lettore come esercizio insieme al calcolo della derivata seconda).