LAUREA IN SCIENZE NATURALI
(CLASSE L-32 e CLASSE 27)
Lezioni del II semestre – A.A. 2009/201

Matematica con elementi di statistica

(II parte) - 4 crediti – 32 ore di lezione frontale

Docente Maria Polo

Dipartimento di Matematica e Informatica,
Via Ospedale 72-Cagliari

e-mail: mpolo@unica.it tel 070 675 8528

Propedeuticità
Matematica con elementi di statistica è propedeutica a tutti gli insegnamenti del 3° anno

- **Obiettivi dell'insegnamento**
  Acquisire le capacità per saper affrontare un problema scientifico utilizzando strumenti e modelli matematici e statistici.

- **Conoscenze (sapere)**

Calcolo Integrale di funzioni in una variabile.

Vettori e algebra lineare. Successioni e serie (cenni).

Elementi di calcolo delle probabilità e statistica

(elementi di base per alcune applicazioni nelle scienze naturali).

Testi di riferimento

- 1. **D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, Matematica per le scienze della vita, Ambrosiana, 2008**
- **2. Invernizzi, Matematica nelle Scienze Naturali, Libreria Goliardica Editrice, 1996**
- 3. Dispense del Prof. S. Montaldo A.A. 2008/2009
- 4. Pagani, Salsa, Matematica per i Diplomi universitari, Masson, 1997

I testi sono consultabili presso l'aula 16 e la biblioteca del Dipartimento di Matematica e Informatica

Modalità d'esame

Due prove scritte in itinere (una a metà corso, 18 Dicembre una a fine corso). Gli studenti che avranno superato nel complesso le prove in itinere sono ammessi alla prova orale. La prova orale può essere di due forme:

- Prova di conferma. In questo caso lo studente viene interrogato sugli esiti del suo elaborato e avere confermato il voto dello scritto.
- \- Colloquio integrativo. In questo caso lo studente viene interrogato sugli esiti del suo elaborato e su tutti gli altri argomenti del programma. Il colloquio è finalizzato al miglioramento della votazione finale rispetto a quella dello scritto.

- Se la prova orale non è sufficiente lo studente dovrà ripetere la stessa. Se lo studente fallisce per due volte la prova orale dovrà ripetere la prova scritta.
- Gli studenti che non superano le prove in itinere potranno sostenere una delle prove scritte generali pubblicate nel sito del corso.

Possono sostenere le prove in itinere anche gli studenti non matricole

Calcolo integrale

- Primitiva di una funzione di variabile reale
- Integrale di Riemann e proprietà elementari
- Regole di integrazione (integrazione per parti e per sostituzione)

- Esempi nelle applicazioni

Primitiva di una funzione di variabile reale

Definizione

Data una funzione $f(x)$, la funzione $F(x)$ è detta primitiva di $f(x)$ se in tutti i punti del suo dominio è soddisfatta l'uguaglianza

$$F'(x) = f(x)$$

Se $F(x)$ è primitiva di $f(x)$, anche $F(x) + c$, $\forall\ c \in \Re$, è primitiva di $f(x)$

Dimostrazione

Si ha infatti $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$

Primitiva di una funzione di variabile reale

Esempi

La primitiva di $f(x)=x^4$ è $F(x)=\frac{x^5}{5}+c$

Infatti essendo $f'(x)=(\alpha x^{\beta})'=\frac{d}{dx}(\alpha x^{\beta})=\alpha\beta x^{\beta-1}$

Si ha $F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}+c\right)'=5\frac{1}{5}(x)^{5-1}+0=x^4$

In generale la primitiva di $f(x)=x^{\alpha}$ è $F(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$

Verificare. Calcolare la primitiva di $f(x)=4x^8$

Primitiva di una funzione di variabile reale

Esempi

Ricordando che

$$f'(x) = \left(e^x\right)' = \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$(sen x)' = \frac{d}{dx}(sen x) = \cos x$$

Calcolare la primitiva di

$$f_1(x) = e^x \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad f_3(x) = \cos x$$

$$F_1(x) = e^x + c$$

$$F_2(x) = \ln x + c$$

$$F_3(x) = sen x + c$$

Verificare il risultato ottenuto

Integrale definito di una funzione di variabile reale e calcolo dell'area di una regione piana

Sia *f(x)* una funzione positiva e continua definita nell'intervallo *[a,b]*

L'area della regione piana compresa tra il grafico della funzione, l'asse *x*, e le rette $x=a$ e $x=b$ si ottiene come

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n^- = \lim_{n\to\infty} A_n^+ = A$$

Dove A_n è una somma di Cauchy, A_n^- e A_n^+ sono le somme di Riemann

Definizione.

Il valore A si chiama integrale definito della funzione *f(x)* nell'intervallo *[a,b] e si indica con*

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

a e b sono detti estremo inferiore e superiore di integrazione, f è detta funzione integranda

Integrale definito di una funzione di variabile reale e calcolo dell'area di una regione piana

Esempio

Consideriamo la funzione *f(x) = x , definita e continua su* $\Re$

Calcoliamo la primitiva e la regione di piano delimitata dal grafico della curva e dalle rette x=0 e x= 1

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

Calcoliamo l'area del triangolo di vertici (0,0) (1.0) e (1,1)

$A = \int_a^b x dx = \frac{1}{2}$ che si ottiene calcolando $A = \int_a^b x dx = \frac{1}{2} = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - 0$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Data *f(x)* una funzione, definita e continua nell'intervallo *[a,b]* ,
la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(z)dz$$

È primitiva di *f* nel punto *x* e si ha $F'(x) = f(x)$

Se *F(x)* è una primitiva di *f(x)*, definita nell'intervallo [a,b], allora

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$$

Integrale definito, primitiva e integrale indefinito di una funzione di variabile reale

Data una funzione *f(x) definita e continua su* $\Re$, *l'insieme delle primitive indicata con*

$$F(x) + c = \int f(x)dx$$

Prende il nome di integrale indefinito della funzione

Dimostrazione del teorema fondamentale

Proprietà dell'integrale e regole di calcolo dell'integrale definito e indefinito

Teorema fondamentale del calcolo integrale Dimostrazione

Data *f(x)* una funzione, definita e continua nell'intervallo *[a,b]* , la funzione $F(x)=\int_a^x f(z)dz$

È primitiva di *f* nel punto *x* e si ha $F'(x)=f(x)$

Per dimostrare il teorema consideriamo le due seguenti proprietà dell'integrale

Data *f(x),* definita e continua nell'intervallo *[a,b]*

1. *Se c* $\in$ *(a, b), si ha* $\int_a^b f(z)dz=\int_a^c f(z)dz+\int_c^b f(z)dz$

2. *Se M e m sono rispettivamente il massimo e il minimo di f(x)* nell'intervallo *[a,b], allora*

$$m(b-a)\leq\int_a^c f(z)dz\leq M(b-a)$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale
Dimostrazione

Data *f(x)* una funzione, definita e <u>continua nell'intervallo *[a,b]*</u>, la funzione $F(x)=\int_a^x f(z)dz$

È primitiva di *f* nel punto *x* e si ha $F'(x)=f(x)$

Per dimostrare il teorema dobbiamo mostrare che vale l'uguaglianza $F'(x)=f(x)$

Dobbiamo quindi costruire il rapporto incrementale per la *F(x)* e calcolare il lim

Consideriamo un incremento h e scriviamo *F(x+h) utilizzando la proprietà 1*

$$F(x+h)=\int_a^{x+h} f(z)dz=\int_a^x f(z)dz+\int_x^{x+h} f(z)dz$$

Il rapporto incrementale è $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$

Teorema fondamentale del calcolo integrale
Dimostrazione

Data *f(x)* una funzione, definita e continua nell'intervallo *[a,b]* , la funzione $F(x)=\int_a^x f(z)dz$

È primitiva di *f* nel punto *x* e si ha $F'(x)=f(x)$

Mostriamo ora che il limite per *h→0* del rapporto incrementale è *f(x)*

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(z)dz}{h}=f(x)$$

Utilizzando la proprietà 2 , nell'intervallo [x, x+h] di ampiezza h, si ha infatti

$$h\cdot\min_{x\in[x,x+h]} f(z)\le\int_x^{x+h} f(z)dz\le h\cdot\max_{x\in[x,x+h]} f(z)$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale
Dimostrazione

Data *f(x)* una funzione, definita e <u>continua nell'intervallo *[a,b]*</u>, la funzione $F(x)=\int_a^x f(z)dz$

È primitiva di *f* nel punto *x* e si ha $F'(x)=f(x)$

Dividendo per h>0, e calcolando il limite per h→0, poiché il massimo e il minimo di f(x) nell'intervallo [x, x + h] tendono a f(x) per h→0, si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\min_{x\in[x,x+h]} f(z)\right)\le\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(z)dz}{h}\le\lim_{h\to 0}\left(\max_{x\in[x,x+h]} f(z)\right)=f(x)$$

Abbiamo ottenuto, come volevamo dimostrare $F'(x)=f(x)$

Teorema fondamentale del calcolo integrale Importante conseguenza

Definiamo il differenziale di f(x), indicato con df (variazione infinitesima di f)

Se la funzione f(x) , ha derivata f'(x) nel punto x, si ha

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}f(x) = f'(x)dx$$

Cioè la variazione infinitesima *df* è proporzionale all'incremento infinitesimo *dx*
Il coefficiente di proporzionalità è la derivata prima nel punto *x*

Se F*(x)* è una funzione, derivabile nell'intervallo *[a,b] . Il teorema fondamentale del calcolo differenziale afferma che vale l'uguaglianza*

$$\int_a^b F'(x)dx = \int_a^b \mathrm{d}F(x) = F(b) - F(a)$$

Calcolo integrale. Regole e metodi di integrazione

Per le seguenti funzioni continue, valgono le formule, dove c è una costante arbitraria

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{per} \quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + \mathrm{c}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + \mathrm{c}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c$$

Calcolo integrale. Integrale definito e calcolo di area Esempi.

Calcolo di integrali definiti e aree. Esempi

$$\int_1^{e^2} x^{-1}dx =$$

$$\int_1^{e^2} x^{-1}dx = \ln|x|\Big]_1^{e^2} = \ln e^2 - \ln 1 = 2$$

Calcolare l'area della regione compresa tra l'asse delle *x*, il grafico di *sinx,* e le rette di equazione $x = -\pi$ e $x = \pi$

Calcolare l'area della regione, del semipiano x>0, delimitata dai grafici delle due funzioni

$$f(x) = 5 - 2x \quad \text{e} \quad f(x) = x^2 - 2x + 1$$

Calcolo integrale. Integrale definito e calcolo di area
Esempi.

Calcolare l'area della regione compresa tra l'asse delle *x*, il grafico di *sinx*, e le rette di equazione $x = -\pi$ e $x = \pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$$

L'integrale definito è zero. Funzione dispari.
Gli estremi di integrazione sono opposti.
Quanto vale l'area della regione?

$$Area = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \int_{-\pi}^{0} -\sin x dx + \int_{0}^{\pi} \sin x dx = -\left(-\cos x\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \left(-\cos x\right)\Big|_{0\pi}^{\pi} = 4$$

Calcolare l'area della regione, del semipiano x>0, delimitata dai grafici delle due funzioni

$$f(x) = 5 - 2x \quad \text{e} \quad f(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad A = \frac{16}{3}$$

Calcolo integrale. Regole e metodi di integrazione

Date due funzioni continue e c è una costante arbitraria, si ha

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

Le stesse proprietà valgono per gli integrali definiti, in particolare si ha

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Media di una funzione: data *f* continua in un intervallo [a,b] si definisce media della funzione il numero

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Calcolo integrale. Regole e metodi di integrazione

Dal teorema fondamentale e dalla regola di derivazione del prodotto si ha la seguente **Formula di integrazione per parti.**

Sia *F(x)* una primitiva di *f(x)* e *G(x)* una primitiva di *g(x)*

$$\int f(x)\cdot G(x)dx = F(x)\cdot G(x) - \int F(x)\cdot g(x)dx \qquad G'(x) = g(x)$$

Esempio

$$\int \ln x dx = \int 1\cdot(\ln x)dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = (x\ln x - x) + c$$

Calcolo integrale. Regole e metodi di integrazione

Metodo di integrazione per sostituzione

Il metodo di applica se non è immediato calcolare l'integrale di f(x) e se si può trovare una variabile ausiliaria z legata ad x dalla relazione x = g(z)

Si calcola il differenziale d*x* e si sostituisce nell'integrale la nuova variabile z e il d*x* espresso in termini della nuova variabile z

Se l'integrale ottenuto è più elementare si calcola $\int f\left(g(z)\right)\cdot g'(z)dz$

Calcolata la primitiva otteniamo una funzione di z, che dobbiamo ricondurre alla variabile x

Esempio. Calcolare l'integrale indefinito della funzione $f(x)=\cos(5x-1)$

se poniamo $z=(5x-1)$ la funzione da integrare diventa $\cos z$

Calcolo integrale. Regole e metodi di integrazione

Si calcola il differenziale *dx* e si sostituisce nell'integrale la nuova variabile z e il *dx* espresso in termini della nuova variabile z

Se l'integrale ottenuto è più elementare si calcola $\int f(g(z)) \cdot g'(z) dz$

Calcolata la primitiva otteniamo una funzione di z, che dobbiamo ricondurre alla variabile x

Esempio

$$z = (5x - 1) \quad \text{da cui } x = g(z) = \frac{z+1}{5} \quad \text{ci serve } \mathrm{d}x = g'(z)dz = \frac{1}{5}dz$$

$$\int f(g(z)) \cdot g'(z) dz = \int \cos z \cdot \frac{1}{5} dz = \frac{1}{5} \int \cos z dz = \frac{1}{5} \sin z + c$$

$$\int \cos z dz = \frac{1}{5} \sin z + c = \frac{1}{5} \sin(5x - 1) + c$$

Calcolo integrale. Regole e metodi di integrazione

Il metodo di integrazione per sostituzione consente di determinare l'integrale di semplici funzioni composte delle funzioni elementari

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{per} \quad n \neq -1 \qquad \int \left(f(x)\right)^n f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{per} \quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + c \qquad \int \left(f(x)\right)^{-1} f'(x) dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

Esempi

$$\int \left(3x^2 - x + 2\right)^2 (6x-1) dx = \qquad \int \left(3x^2 - x + 2\right)^2 (6x-1) dx = \frac{\left(3x^2 - x + 2\right)^3}{3} + c$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-(\sin x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c$$

Calcolo integrale.

Non saranno presi in considerazione:

- Integrali impropri
- Integrali definiti e indefiniti di funzioni di 2 o più variabili
- Integrale curvilineo
- Funzioni periodiche e sviluppi in serie
- Equazioni differenziali

D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, Matematica per le scienze della vita, Ambrosiana, 2008
Parte teorica Cap. 9 fino a pag. 373 – esercizi da 9.1 a 9.18

Successioni e Serie.

- Successioni
- Progressioni
- Limite di successioni
- Serie convergenti – serie divergenti
- Serie geometrica, serie esponenziale
- Successioni e Leggi di ricorrenza
- Esempi nelle applicazioni

D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, Matematica per le scienze della vita, Ambrosiana, 2008

Parte teorica ed esercizi Cap. 7 da pag. 278 a pag.295

Successioni e Progressioni
Definizioni e esempi

Una successione di numeri reali è interpretabile come una funzione di Dominio = *N che ha come immagine un sottoinsieme di R*

$$s_1\ , s_2\ , s_3\ , \ldots . s_{n-1}\ , s_n\ , s_{n+1}\ , \ldots .$$

$$S(n) = \frac{1}{2n} \qquad \text{con n da 1 a } \infty, \text{ ha come termini } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots$$

Progressione: la somma di un numero finito di termini di una successione .Esempio.
La somma dei primi n numeri naturali

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots . + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Esercizio. Calcolare la somma dei numeri naturali da 1 a 9

$$\sum_{k=1}^{9} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = ?$$

$$\sum_{k=1}^{9} k = \frac{9(10)}{2} = 45$$

Successioni e Comportamento asintotico.

Per le successioni interpretate come funzioni di Dominio = *N*, si può determinate il comportamento asintotico per $n \to \infty$ $\pm\infty$?

Valgono tutte le proprietà dell'operazione di limite viste nel caso generale delle funzioni di variabile reale. (eccetto quelli che necessitano della continuità della funzione come ipotesi)

Esempi. Scrivere per esteso alcuni termini delle seguenti successioni e studiare il comportamento asintotico

$$S(n) = \frac{1}{2n} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

$$S(n) = n \qquad \lim_{n \to \infty} n = +\infty$$

$$S(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Successioni e Serie.

Progressione: la somma di un numero finito di termini di una successione .Esempio.
La somma dei primi n numeri naturali

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione dell'uguaglianza.
Scrivendo per esteso i termini da 1 a n e da n a 1 e sommando si ottiene

$$1 + \quad 2 + \quad 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + \ldots\ldots\ldots + (n-1) + n$$

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \quad 2 \quad + 1$$

$$\text{La somma ennesima,o ridotta ennesima} = S_n \quad \frac{n(n+1)}{2}$$

Determinando il limite della successione S_n per $n \to +\infty$ si determina l'esistenza della somma infinita

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$$

La somma non è finita. Si dice che la serie diverge

Serie. Definizione di somma finita
Serie convergenti – serie divergenti

Data la successione di termine generico $s_n = s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots s_n, \ldots\ldots$ Consideriamo la successione delle somme parziali

$S_1 = s_1$, $S_2 = s_1 + s_2$, $S_3 = s_1 + s_2 + s_3$, ………… $S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots\ldots S_n$

Che prende il nome di serie. Se, per $n \to +\infty$ il limite della successione delle somme parziali esiste finito cioè appartiene ad R si dice che la serie converge e ha somma finita

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha \in \Re \quad \text{cioè}\ \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} s_n$$

Esempio. Consideriamo la serie geometrica di ragione q
Per $|q| < 1$ la serie è convergente e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

La somma è finita.
Perché si ha per $|q| < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$$

Serie.
Serie geometrica

Uno dei paradossi di Zenone (fine del 400 a.C.)
La freccia non colpirà mai il bersaglio. Se t è il tempo impiegato per percorrere metà del percorso dall'arco al bersaglio, il tempo t/2 sarà quello impiegato per percorrere la prima metà della seconda metà del percorso, e così via …..(supponendo la velocità costante)
Per percorrere tutti i tratti infiniti mancanti …..occorrerà un tempo infinito …..

Il tempo T impiegato per percorrere l'intero percorso sarà $T = t + t/2 + t/4 + t/8 + \ldots$
Si tratta della serie geometrica di ragione ½ che ha somma finita
Verificare e calcolare il tempo T

$$t\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = t\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$T = t\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{2}^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2t$$

Per percorrere l'intero percorso la freccia impiega il doppio del tempo impiegato per percorrere la prima metà dello stesso percorso

Serie.
Serie esponenziale

Si chiama serie esponenziale la serie di potenze definita dalla seguente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

n! si legge n fattoriale e vale $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad \text{con } 0! = 1$

Per x = 1 la serie permette di calcolare il valore del numero *e*
le somme parziali ne danno una approssimazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots \frac{1}{n!} + \ldots\ldots = e$$

Successioni e Leggi di ricorrenza

Una successione si dice definita per ricorrenza se il termine ennesimo è definito sulla base di uno o più termini che lo precedono

$$s_n = s_{n-2} \pm s_{n-1}$$

Esempio. La successione di Fibonacci. Determinare i primi 8 termini sapendo che la successione è definita dalla relazione

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{con } F_0 = 1$$

$$F_0 = 1$$
$$F_1 = 2$$
$$F_2 = 3$$
$$F_3 = 5$$
$$F_4 = 8$$
$$F_5 = 13$$
$$F_6 = 21$$

Una coppia di conigli adulti genera ogni mese una coppia di conigli. Gli animali diventano adulti in un mese e sono in grado di riprodursi. (trascurando la mortalità). La relazione permette di determinare quanti conigli si avranno dopo un numero fissato di mesi

Successioni e Leggi di ricorrenza

Data una funzione y = f(x) definiamo **sistema dinamico discreto (s.d.d.)** la relazione di ricorrenza, definita per $k \in \mathbb{N}$, con x_0 dato iniziale assegnato

$$x_k = f\left(x_{k-1}\right)$$

Nel caso generale si ottiene la successione che si chiama **soluzione del sistema dinamico**

$$x_0, \quad x_1 = f\left(x_0\right), \; x_2 = f\left(x_1\right), \ldots\ldots$$

Esempio. Data la funzione che definisce la crescita malthusiana, costruire i primi quattro termini della successione

$$N_t = R^t N_0$$

$$N_0$$

$$N_1 = f\left(N_0\right) = RN_0$$

$$N_2 = f\left(N_1\right) = RRN_0 = R^2 N_0$$

$$\ldots$$

Molti fenomeni naturali vengono modellizzati utilizzando sistemi dinamici discreti, Lineari omogenei o non omogenei.

Vedremo prima di affrontare lo studio di alcuni di questi fenomeni gli elementi essenziali della teoria dei sistemi dal punto di vista dell'algebra lineare.

Elementi di calcolo vettoriale e matriciale

- Grandezze scalari e grandezze vettoriali
- Vettori. Definizione algebrica. Modulo e operazioni
- Vettori. Rette, piani e sistemi di equazioni
- Matrici e calcolo matriciale (elementi)
- Determinante di Matrici. Matrice singolare e risoluzione di sistemi omogenei
- Regola di Cramer
- Esempi nelle applicazioni

Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Grandezze **scalari: descritte da un numero,**
Volume, temperatura, tempo, peso, posizione di un punto su una retta

Grandezze **vettoriali: descritte da un numero, da una direzione e da un verso**
Distanza di un punto dall'origine, velocità, forza

Nel caso generale
Un **vettore v** è una grandezza
caratterizzata da:
•**modulo (o ampiezza, o lunghezza)**
•**direzione**
•**verso**

Un **vettore v** è spesso indicato con il simbolo $\vec{V}$

Dal punto di vista algebrico il vettore che indica lo spostamento OP, si esprime assegnando lo spostamento x sull'asse delle X e lo spostamento y sull'asse delle Y

$\vec{V}$ **= V** = *(x, y)* vettore **v dello spazio a due dimensioni** di componenti x e y . Esempio **V** = *(3, 2)*

Vettori. Definizione algebrica

Un vettore **v** nello spazio n-dimensionale $\Re^n$, *con n = 1, 2, 3,* ……. è una qualsiasi sequenza di numeri reali

$$\mathrm{v} = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots, v_n)$$

$v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots$ sono dette componenti del vettore

Esempi. Il vettore nullo è il vettore costante le cui componenti sono nulle
Dati tre punti del piano (o di $\Re^2$) P = (2, 1), Q = (1,2), R = (3,3) individuare i segmenti orientati OP e QR

Il punto P può essere individuato come estremo del segmento orientato OP (che si individua considerando a partire dall'origine O, del sistema di riferimento, lo spostamento di 2 unità verso destra e di 1 unità verso l'alto). In modo analogo si può determinare il segmento orientato QR (l'estremo R si individua partendo dal punto Q considerando lo spostamento di 2 unità verso destra e di 1 unità verso l'alto)
Il punto di partenza è diverso ma lo spostamento è lo stesso: viene così individuato e definito un unico vettore **V** = *(2, 1)*

Modulo, direzione e verso non variano.

Esercizio. Determinare tre punti del piano che individuino lo spostamento corrispondente al vettore

$$\vec{v} = (3, -2)$$

Vettori. Determinazione del Modulo

Un vettore **v** nello spazio n-dimensionale $\Re^n$, *con n = 1, 2, 3,* ……. è una qualsiasi sequenza di numeri reali

$$\mathrm{v} = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots, v_n)$$

$v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots$ sono dette componenti del vettore

Il **modulo** del **vettore v** (o lunghezza) $\quad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots. + v_n^2}$

Esempi. In $\Re^3$ consideriamo il vettore v = (1, 2, 3). Rappresentare il vettore e calcolare il modulo

Verificare che il modulo del vettore v = (1, 2, 3) esprime la distanza di P = (1,2,3) dall'origine.

Detta H la proiezione di P sul piano XY, A la proiezione di H sull'asse X e B la proiezione di H sull'asse Y, la distanza PO è data da

$$|PO| = \sqrt{|OH|^2 + |PH|^2} = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2 + |PH|^2}$$

Vettori. Operazioni con i vettori

Moltiplicazione per uno scalare.
Il prodotto di un vettore **v,** dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, con n = 1, 2, 3, ……. , per uno scalare $\gamma \in \Re$, è **il vettore** che si ottiene moltiplicando tutte le componenti del vettore per γ.

Il vettore $\gamma \mathrm{v} = (\gamma v_1, \gamma v_2, \ldots\ldots, \gamma v_n)$ ha la stessa direzione di v, lo stesso verso se $\gamma > 0$,

verso opposto se $\gamma < 0$.
Il modulo (o lunghezza) di γv è dato dal prodotto $|\gamma \mathrm{v}| = |\gamma| \cdot |\mathrm{v}|$

Un **vettore di modulo 1 si chiama versore**

Dato il vettore **v** , con **v ≠ 0**, il vettore $\hat{\mathrm{v}} = \frac{1}{|\mathrm{v}|}\mathrm{v}$

è il **versore** che esprime la direzione e il verso di **v**

Esempi. I versori corrispondenti alle direzioni e verso degli assi cartesiani sono
In $\Re^2$: $e_x = (1,0)$ $e_y = (0,1)$ In $\Re^3$ $e_x = (1,0.0)$ $e_y = (0,1.0)$ $e_z = (0,0,1)$

Vettori. Operazioni con i vettori

Somma.
La somma di due vettori **v, u** dello spazio a due dimensioni è il vettore che ha per componenti la somma delle componenti . Scrivere il vettore somma di

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2) \qquad \mathrm{w} = ? \qquad \mathrm{w} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

Nel caso generale di vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, la somma di due vettori

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$$

è il vettore

$$\mathrm{w} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots\ldots\ldots, v_n + u_n)$$

Esempi. Determinare il vettore somma dei vettori *v = (2,1)* *u = (1,3)* *e* *v = (3,-2)* *u = (-1, -2)*

Rappresentazione grafica. La regola del parallelogramma permette di determinare il vettore somma che corrisponde alla diagonale del parallelogramma (dall’origine comune dei due vettori al vertice opposto)

Vettori. Operazioni con i vettori

Differenza.

La differenza di due vettori **v - u** dello spazio $\Re^n$ è il vettore che si ottiene sommando il primo con l'opposto dell'altro **w = v + (-1)u**

Se P e Q sono due punti di $\Re^n$, il vettore differenza che si ottiene sottraendo le coordinate esprime lo spostamento da P a Q e il modulo è la distanza PQ

$$\mathrm{P} = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n) \qquad \mathrm{Q} = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$$

$$\mathrm{w} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots\ldots\ldots, u_n - v_n)$$

$$|\,\mathrm{w}\,| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2, (u_2 - v_2)^2, \ldots\ldots\ldots, (u_n - v_n)^2)}$$

Esempi.

Determinare il vettore differenza dei vettori *v = (2,1)* *u = (1,3)* *e* *v = (3,-2)* *u = (-1, -2)*

Vettori. Operazioni con i vettori

Combinazione lineare.

Dati due vettori $\mathbf{v_1}$**,** $\mathbf{v_2}$ dello spazio $\Re^n$ e due numeri reali γ_1 e γ_2 il vettore $\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2$

Si chiama combinazione lineare di coefficienti γ_1 e γ_2 dei due vettori $\mathbf{v_1}$**,** $\mathbf{v_2}$

Nel caso generale di vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, e per qualunque k la combinazione lineare di k vettori $\mathbf{v_1}$**,** $\mathbf{v_2}$ …… $\mathbf{v_k}$**,** di coefficienti γ_1 , γ_2 …….. γ_k **è il vettore**

$$w = (\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots\ldots + \gamma_k v_k) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i v_i$$

Esempi. Determinare il vettore combinazione lineare dei vettori ***v*** = *(2,1)* ***u*** = *(1,3)* di coefficienti

γ_1 = -1/2 γ_2 = -1/3

Vettori. Operazioni con i vettori. Combinazione lineare, Baricentro e media pesata

Baricentro.

Dati k punti materiali P_i, di massa m_i, individuati dai vettori di posizione in R^3 $P_i = (x_i, y_i, z_i)$

detta M la massa totale $M = \sum_{i=1}^{k} m_i$

Il baricentro (centro di massa) è il vettore dato da

$$B = \left(\frac{m_1}{M} P_1 + \frac{m_2}{M} P_2 + \ldots\ldots + \frac{m_k}{M} P_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{M} P_i = \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{m_i}{M} x_i, \sum_{i=1}^{K} \frac{m_i}{M} y_i, \sum_{i=1}^{K} \frac{m_i}{M} z_i \right)$$

Esempio. Determinare il baricentro dei punti $P_1 = (1/2, 0)$, di massa $m_1 = 4$, $P_2 = (0,1)$, di massa $m_2 = 1$, $P_3 = (1, 0)$, di massa $m_3 = 2$, $P_4 = (1,1)$, di massa $m_1 = 3$,

Cioè il vettore combinazione lineare dei vettori
$\boldsymbol{v_1} = (1/2,0)$ $\boldsymbol{v_2} = (0,1)$……. di coefficienti rispettivamente m_i/M

Vettori. Operazioni con i vettori. Combinazione lineare e media pesata

Media e media pesata.

Dati due punti P_1 e P_2, sulla retta il **punto medio** (baricentro dei punti materiali con massa 1) rappresenta **la media aritmetica**

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_i}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

La media aritmetica per k punti (o k numeri) è data da

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}$$

Esempio.
Scrivere i vettori che rappresentano i voti nei due esami e determinare il vettore che esprime la media dei voti riportati agli esami

		Studenti		
$\mathbf{v_i}$	**Esami**	$\mathbf{S_1}$	S_2	S_3
V_1	I Modulo (5 crediti)	20	24	28
V_2	II Modulo (4 crediti)	28	30	24
V_3				
…..				
v_k				

Vettori. Operazioni con i vettori. Combinazione lineare e media pesata

Media e media pesata.

La media aritmetica per n punti (o n numeri) è data da

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}$$

La media pesata (baricentro, combinazione lineare di vettori con coefficienti diversi tra loro, da zero, e non tutti uguali a 1) si utilizza quando il fenomeno riguarda numeri che hanno *peso diverso. Ed è data dal vettore combinazione lineare dei vettori assegnati e con coefficienti uguali al rapporto tra peso di ciascun numero e peso totale peso.*

Esempio.
Determinare il vettore che esprime la media pesata dei voti riportati agli esami che tenga conto dei crediti di ciascun esame

$$M_p = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{p_1}{P} x_i , \sum_{i=1}^{k} \frac{p_1}{P} y_i , \sum_{i=1}^{k} \frac{p_1}{P} z_i \right)$$

$$M_p = \left(\frac{5 \cdot 20 + 4 \cdot 28}{9} , ?, ? \right)$$

		Studenti		
v_i	**Esami**	**S_1**	S_2	S_3
V_1	I Modulo (5 crediti)	20	24	28
V_2	II Modulo (4 crediti)	28	30	24

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto scalare (o prodotto interno).
Dati due vettori **v, u** dello spazio a due dimensioni **il prodotto scalare è un numero** (uno scalare) definito da (la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti)

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2) \qquad \mathrm{v} \cdot \mathrm{u} = (v_1 u_1 + v_2 u_2)$$

Nel caso generale di due vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, il prodotto scalare di

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$$

è il numero

$$\mathrm{v} \cdot \mathrm{u} = (v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots\ldots + v_n u_n) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} v_k u_k$$

Esempi.
Determinare il prodotto scalare dei vettori *v = (2,1)* *u = (1,3)* *e* *v = (3,-2)* *u = (-1, -2)*

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto scalare (o prodotto interno) e interpretazione geometrica
Dati due vettori **v, u il prodotto scalare è il numero** corrispondente al prodotto dei moduli per il coseno dell’angolo compreso tra le loro direzioni

Nel caso generale di due vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, il prodotto scalare di

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots.., v_n) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots.., u_n)$$

è il numero

$$\mathrm{v} \cdot \mathrm{u} = |\mathrm{v}| \cdot |\mathrm{u}| \cos \alpha$$

Importante conseguenza
Due vettori u e v sono ortogonali se e solo se il prodotto scalare è nullo

Esempi
Calcolare il prodotto scalare dei vettori **u** = (2, 1,0) e **v** = (5, -1, 2). Determinare due vettori ortogonali e verificare che il loro prodotto scalare è nullo
Per quale valore di *a* i vettori v = (3 *a*, 1) e v = (2, -1- *a*) sono ortogonali?

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto scalare e proiezioni ortogonali

Dati due vettori **v, u** α l' angolo compreso tra le loro direzioni e **û** il versore di **u**

il numero $$\mathrm{v}\cdot\hat{\mathrm{u}} = |\mathrm{v}|\cdot|\hat{\mathrm{u}}|\cos\alpha = |\mathrm{v}|\cos\alpha$$

è l'ascissa della proiezione del vettore **v** lungo la retta individuata dalla direzione di **u**

Essendo il modulo del versore uguale ad 1

Il vettore $$(\mathrm{v}\cdot\hat{\mathrm{u}})\,\hat{\mathrm{u}}$$

è il vettore proiezione ortogonale di v lungo **û** cioè lungo la direzione di **u**

Esempi

Determinare le proiezioni ortogonali d dei vettori $\mathbf{w_1}$ = (0, 3), $\mathbf{w_2}$ = (1, 1), $\mathbf{w_3}$ = (2, -1), lungo la direzione del vettore **v** = (2, 1) ; determinare un vettore $\mathbf{w_4}$ con la stessa proiezione ortogonale di $\mathbf{w_1}$ lungo la direzione di **v**

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto vettoriale e interpretazione geometrica

Dati due vettori **v, u** $\quad \mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$

il prodotto vettoriale v x u è il vettore dato da

$$\mathrm{v} \times \mathrm{u} = (v_2 u_3 - v_3 u_2, v_3 u_1 - v_1 u_3, v_1 u_2 - v_2 u_1) = \mathrm{v} \wedge \mathrm{u}$$

Il prodotto vettoriale è antisimmetrico $\quad \mathrm{v} \times \mathrm{u} = -\mathrm{u} \times \mathrm{v}$

Esempi
Verificare che il prodotto vettoriale dei vettori u = (2, 1,0) e v = (5, -1, 2) è antisimmetrico

il vettore che si ottiene come prodotto vettoriale di due vettori ha le seguenti proprietà:

Il modulo del vettore è dato da $\quad |\mathrm{v} \times \mathrm{u}| = |\mathrm{u}||\mathrm{v}| \sin\alpha \quad$ con α angolo tra **v** e **u**

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto vettoriale e interpretazione geometrica

Dati due vettori **v, u** $\quad \mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$

il prodotto vettoriale v x u è il vettore w dato da

$$\mathrm{w} = \mathrm{v} \times \mathrm{u} = (v_2 u_3 - v_3 u_2, v_3 u_1 - v_1 u_3, v_1 u_2 - v_2 u_1) = \mathrm{v} \wedge \mathrm{u}$$

il vettore **w** che si ottiene come prodotto vettoriale di due vettori ha le seguenti proprietà:

1. Il modulo del vettore è dato da $|\mathrm{v} \times \mathrm{u}| = |\mathrm{u}|\,|\mathrm{v}| \sin \alpha$ con α angolo tra **v** e **u**

2. La direzione del vettore **v** x **u** coincide con la direzione perpendicolare al piano individuato da **v** e **u**

3. Il verso coincide con quello determinato dalla **regola della mano destra** : si posizionano le prime tre dita in modo che ciascuno sia perpendicolare agli altri due, poi si punta il pollice secondo direzione e verso del vettore **v,** l'indice in quello del vettore **u , il medio indica il verso del vettore prodotto w = v** x **u**
   (guardando dalla freccia di **w = v x u** vediamo il vettore **v** ruotare in senso anti-orario verso **u**)

Vettori. Rette, piani e sistemi di equazioni

Due rette sono parallele se e solo se hanno la stessa direzione

Le rette di equazioni $px + qy = k$ e $p'x + q'y = k'$

sono parallele se i vettori (p, q) e (p', q') sono allineati cioè se (p, q) = λ (p', q') , con λ un opportuno numero reale

Un sistema lineare in due equazioni e due incognite (2 x 2) ha la seguente forma

$$\begin{cases} px + qy = k \\ p'x + q'y = k' \end{cases}$$

Perché il sistema abbia una soluzione deve esistere una coppia ordinata (x, y) che verifica contemporaneamente le due equazioni. La coppia rappresenta il punto di intersezione tra le due rette.

Cosa possiamo dire se le rette sono parallele? E se le rette sono coincidenti?

Vettori. Rette, piani e sistemi di equazioni

Le rette di equazioni $px + qy = k$ e $p'x + q'y = k'$

sono parallele se i vettori (p, q) e (p', q') sono allineati cioè se (p, q) = λ (p', q') , con λ un opportuno numero reale

Un sistema lineare in due equazioni e due incognite (2 x 2) ha la seguente forma

$$\begin{cases} px + qy = k \\ p'x + q'y = k' \end{cases}$$

Se le rette sono incidenti il sistema ha una sola soluzione
Se le rette sono parallele, il sistema non ha soluzioni
Se le rette sono coincidenti, il sistema ha infinite soluzioni

Le considerazioni fatte sull'esistenza delle soluzioni valgono anche nel caso di un sistema 3 x 3.
Le tre equazioni in tre incognite che costituiscono il sistema rappresentano piani nello spazio

Le stesse considerazioni valgono per lo spazio di dimensione n

$p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = k$ è chiamato iperpiano

Vettori. Rette, piani e sistemi di equazioni

Un sistema lineare in tre equazioni e tre incognite (3 x 3) ha la seguente forma

$$\begin{cases} px + qy + rz = k \\ p'x + q'y + r'z = k' \\ p''x + q''y + r''z = k'' \end{cases}$$

Se i piani hanno un punto in comune, il sistema ha una sola soluzione (x_0, y_0, z_0)

Il sistema non ha soluzioni, i piani non hanno, punti, o rette comuni
Il sistema ha infinite soluzioni, che possono rappresentare rette o piani

Esempi. Dire se i sistemi ammettono una, nessuna o infinite soluzioni. Verificare attraverso il calcolo

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 3{,}5y = 1{,}7 \\ 7y = 3{,}4 + 2x \end{cases}$$

Esempi. Risolvere con il metodo di sostituzione, confronto o riduzione (somma) i seguenti sistemi

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x - 2y - 2z = 6 \\ -x + 3y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}y + z - 1 \\ x = 2y - 2z + 3 \\ -x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

Vettori e Matrici (elementi)

Un vettore v se rappresentato nella forma v = (x, y) è detto vettore riga,

mentre se rappresentato nella forma $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è detto vettore colonna

L'operazione che trasforma un vettore riga in un vettore colonna, o viceversa è detto Trasposizione

Una matrice 2x2 è una , tabella di 4 numeri reali disposti su due righe e due colonne

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dato un vettore $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e una matrice T, definiamo **il prodotto righe per colonne** della matrice per il vettore

$$\mathrm{w} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + by \end{pmatrix}$$

Il vettore w si dice trasformato di v mediante T, la prima componente del vettore trasformato si ottiene moltiplicando scalarmente la prima riga per il vettore v , la seconda moltiplicando scalarmente la seconda riga per il vettore **v**

Vettori e Matrici (elementi)

La matrice 2x2 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si chiama **matrice identità** perché lascia invariati tutti i vettori

Esercizio. Definire un vettore e verificare l'affermazione

Una tabella di numeri reali composta da *n* righe ed *m* colonne si dice matrice *n* x *m*)

Ogni elemento di una matrice è individuato da due indici, il primo indica la riga, il secondo la colonna, l'elemento generico T_{ij} è il numero che si trova all'incrocio tra la riga i e la colonna j

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & .. & T1m \\ T_{21} & .. & ... & .. & T_{2m} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .T_{ij}. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ T_{n1} & .. & .. & .. & T_{nm} \end{pmatrix}$$

Per indicare la matrice si usa anche la forma compatta $\mathrm{T} = \{T_{ij}\}$ con $i = 1,2,......,n \qquad j = 1,2,....,m$

Vettori e Matrici (elementi)

La forma generale di un sistema lineare di m equazioni ed n incognite è data da

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

I termini a_{ij} sono i coefficienti del sistema che possono essere rappresentati come elementi della matrice A, i termini noti possono essere rappresentati dal vettore ***b***, le incognite dal vettore ***x***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{1m} \\ a_{21} & .. & ... & .. & a_{2m} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & .. & .. & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Per indicare il sistema si usa anche la forma compatta $Ax = b$

Che si ottiene considerando il prodotto (righe per colonne) della matrice A per il vettore *x*

Matrici. Somma, moltiplicazione per uno scalare e prodotto

Date due matrici *n x m* , $A = \{A_{ij}\}$ e $B = \{B_{ij}\}$ con $i = 1,2,\ldots\ldots,n$ $j = 1,2,\ldots.,m$
e uno scalare γ *,* *d*efiniamo

Somma di matrici $A + B = \{A_{ij} + B_{ij}\}$ è la matrice *n x m* che ha come elementi la somma dei corrispondenti elementi di *A* e di *B*

Moltiplicazione per uno scalare, la matrice $\gamma A = \{\gamma A_{ij}\}$ *n x m* che ha come elementi gli elementi di A moltiplicati per γ

Data la matrice *A* con *n* righe e *k* colonne , e la matrice *B* con *k* righe e *m* colonne *d*efiniamo la **matrice prodotto righe per colonne**, una matrice *C = AB* **n x** m il cui elemento *Cij* è ottenuto moltiplicando scalarmente l'i-esimo vettore riga di A per il j-esimo vettore colonna di B

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{ik}B_{kj} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}B_{rj}$$

Matrici. Somma, moltiplicazione per uno scalare e prodotto. Matrice inversa. Esempi

ESEMPI. Date le due matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

e lo scalare $\gamma = -3$

Determinare la somma $A + B = \{A_{ij} + B_{ij}\}$ la moltiplicazione per lo scalare $\gamma A = \{\gamma A_{ij}\}$

Il prodotto righe per colonne $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{ik}B_{kj} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}B_{rj}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \gamma A = \begin{pmatrix} -3 & 18 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + (-6)\cdot 3 & 1\cdot 1 + (-6)\cdot 0 \\ 1\cdot 5 + 2\cdot 3 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice inversa T^{-1} della matrice T è la matrice per la quale risulta $T\,T^{-1} = I = T^{-1}\,T$

Matrici. Somma, moltiplicazione per uno scalare e prodotto. Esempi e proprietà

ESEMPI. **Catene alimentari**

Date le due matrici T e A

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix} 0.62 & 0.73 & 0.81 \\ 0.58 & 0.41 & 0.70 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0.20 & 0.75 \\ 0.15 & 0.40 \\ 0.31 & 0.55 \end{pmatrix}$$

che rappresentano rispettivamente
La quantità in microgrammi per grammo delle sostanze tossiche (mercurio Hg ed erbicidi E) presenti in tre specie di alghe a1, a2, a3
e la quantità media misurata in grammi delle tre specie di alghe a1, a2, a3 di cui si cibano giornalmente due specie di crostacei c1 e c2
Determinare la quantità di ciascun tipo di inquinante ingerita da ciascuna specie di crostacei.

$$TA=\begin{pmatrix} 0.48 & 1.20 \\ 0.40 & 0.98 \end{pmatrix}$$

Date tre matrici per le operazioni introdotte valgono le seguenti proprietà

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(\gamma A)B = \gamma(AB)$$

Il prodotto tra matrici è associativo $A(BC) = (AB)C = ABC$

Determinante di Matrici. Matrice singolare e risoluzione di sistemi omogenei

Si chiama Determinante di una matrice T 2x2 , e si indica con il numero reale

$$\det T = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det T = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}$$

La matrice T è invertibile se e solo se $\det T \neq 0$. In tal caso la matrice T è detta **non singolare**. In caso contrario la matrice è detta matrice singolare

Se la matrice *T* è non singolare, allora la matrice la matrice inversa T^{-1} è la matrice che esprime l'unica soluzione del sistema Tv = w nell'incognita v
e si ha **$v = T^{-1} w$**

Tale risultato vale per una qualunque matrice *n x n*
Se la matrice *T* è singolare, allora il sistema **Tv = 0** nell'incognita **v,** ha, oltre alla soluzione nulla, anche un numero infinito di soluzioni **v** ≠ 0

Esempio. Verificare che la matrice A è singolare e risolvere il sistema Av = 0

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 18 \end{pmatrix}$$

Determinante di Matrici n x n

Data la matrice $\mathrm{T} = \{T_{ij}\}$ con $i = 1,2,\ldots\ldots,n \qquad j = 1,2,\ldots.,n$

Si chiama **matrice complementare** dell'elemento Tij, la matrice ottenuta sopprimendo l'i-esima riga e la j-esima colonna alle quali appartiene l'elemento.

Tale matrice interviene nel calcolo del determinante di una generica matrice n x n

Il Determinante di una matrice *T* n x n , si calcola con il seguente procedimento
- si sceglie una riga arbitraria
- **si calcolano i determinanti di tutte le matrici complementari degli elementi della riga scelta**
- **si moltiplicano i determinanti per i rispettivi elementi moltiplicati per -1 o 1 con il seguente criterio:**
  - **l'elemento T_{ij} ha segno positivo se i + j è pari, , negativo se i + j è dispari.**
- si sommano i prodotti così ottenuti.

La regola può essere applicata anche scegliendo una qualunque colonna invece che una riga.

Risoluzione di sistemi . Regola di Cramer

Data la matrice $\mathrm{T} = \{T_{ij}\}$ con $i = 1,2,\ldots\ldots,n$ $\quad j = 1,2,\ldots.,n$

Matrice dei coefficienti del sistema Tv = w nell'incognita v = (x_1, x_2, ….x_n), di termine noto w = (b_1, b_2, …b_n)

Se la matrice è non singolare il sistema ha una unica soluzione e si ottiene calcolando

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det T}$$

Per j = 1, 2, …n. Dove B_j è la matrice ottenuta sostituendo w alla colonna Tj della matrice T

Esempio. Trovare la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -x + 3y + z = 0 \\ x + 7z = 1 \end{cases}$$

Si ha det *T* = 15,

x = 1, y = 1/3, z = 0

Risoluzione di sistemi . Autovettori e autovalori

Data la matrice n x n $T = \{T_{ij}\}$ con $i = 1,2,......,n$ $j = 1,2,....,n$

Se v e λ sono rispettivamente un vettore non nullo di R^n e un numero reale, e verificano la relazione

$$T\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$$

Allora il numero λ si chiama autovalore e il vettore **v** si chiama autovettore della matrice *T*

L'equazione $T\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$ è equivalente a $(T - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, con 0 vettore nullo

Gli autovalori della matrice T sono soluzioni dell'equazione

$$\det\,(T - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

detta **equazione agli autovalori** o **equazione caratteristica**

Se il numero λ è un autovalore della matrice T, gli autovettori sono i vettori non nulli che soddisfano l'equazione

$$(T - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Questa equazione matriciale corrisponde ad un sistema lineare che ha infinite soluzioni perché la matrice $T - \lambda I$ ha determinante nullo.

Risoluzione di sistemi . Autovettori e autovalori

Esempio. Consideriamo la relazione di ricorrenza che definisca la successione di Fibonacci (7.43.p. 291)
Indichiamo F_k il numero di coppie di conigli presenti nel mese k, con $k \in \mathrm{N}$, Il primo valore è $F_0 = 1$ (una coppia di adulti), dopo un mese $F_1 = 2$, (la coppia di adulti e luna di cuccioli) alla fine del secondo mese con $F_2 = 3$ (due coppie di adulti e una di cuccioli), e cosi via…. Il numero di coppie di cuccioli al tempo k è uguale al numero di coppie adulte al tempo k-1. Indicando con c_k le coppie di cuccioli e a_k le coppie di adulti, l'evoluzione del numero delle coppie è data dalla legge

$$\begin{cases} c_k = a_{k.1} \\ a_k = a_{k-1} + c_{k-1} \end{cases}$$

Verificare che tale legge è equivalente alla forma matriciale

$N_k = AN_{k-1}$ con $$N_k = \begin{pmatrix} c_k \\ a_k \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il numero totale di coppie di conigli F_k è dato da $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$

Scrivere i primi 10 termini della successione (Struttura di grafo ad albero)

Risoluzione di sistemi . Autovettori e autovalori

Esempio. Consideriamo la relazione di ricorrenza che definisca la successione di Fibonacci (7.43.p. 291)
Indichiamo F_k il numero di coppie di conigli presenti nel mese k, con k $\in \mathrm{N}$, Il primo valore è $F_0 = 1$ (una coppia di adulti), dopo un mese $F_1 = 2$, (la coppia di adulti e luna di cuccioli) alla fine del secondo mese con $F_2 = 3$ (due coppie di adulti e una di cuccioli), e cosi via…. Il numero di coppie di cuccioli al tempo k è uguale al numero di coppie adulte al tempo k-1. Indicando con c_k le coppie di cuccioli e a_k le coppie di adulti, l'evoluzione del numero delle coppie è data dalla legge

$$\begin{cases} c_k = a_{k.1} \\ a_k = a_{k-1} + c_{k-1} \end{cases}$$

Verificare che tale legge è equivalente alla forma matriciale

$N_k = AN_{k-1}$ con $N_k = \begin{pmatrix} c_k \\ a_k \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Il numero totale di coppie di conigli F_k è dato da $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$

Scrivere i primi 10 termini della successione (Struttura di grafo ad albero)

Elementi di calcolo delle probabilità e di statistica (cap. 10 – 11 – 12)

Eventi. Frequenza . Probabilità

Fenomeni casuali. Gli aspetti di un fenomeno, i risultati di una misura o di una prova, gli esiti di un gioco, la cui modalità di realizzazione non è certa a priori sono detti eventi casuali, o aleatori.

Se N è il numero di prove nel corso delle quali un evento *e*

può realizzarsi o non realizzarsi.

Il numero di volte che su N prove si realizza l'evento e, si chiama **frequenza assoluta** di e, e si indica con F(e).

Il rapporto f(e) = F(e) / N si dice invece **frequenza relativa**.

Si ha dalla definizione che $0 \leq F(e) \leq N$

In particolare: se e non si verifica mai F(e) = 0, se si realizza sempre F(e) = N

Quanto vale f(e) ?

$0 \leq f(e) \leq 1$

Elementi di calcolo delle probabilità e di statistica
Eventi. Frequenza . Probabilità

Se N è il numero di prove, empiricamente al crescere del numero N la frequenza relativa ha l'andamento di una successione convergente ad un numero compreso, o uguale, a 0 e 1.

L'insieme di tutte le diverse realizzazioni di un evento aleatorio è detto spazio degli eventi

$S = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$, ogni evento e_i prende il nome di evento elementare

La misura della possibilità del verificarsi di un evento è quantificata da un numero **detto probabilità dell'evento *e*** indicata con $P(e_i)$

Nel caso di prove ripetute la probabilità di e_i approssima la frequenza relativa, e si ha quindi

$0 \leq P(e) \leq 1$ e $P(e_1) + P(e_2) + \ldots + P(e_n) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = 1$

Esempio. Il sesso dei primi 1000 nati di un reparto pediatrico in un anno è distribuito: 513 femmine e 417 maschi. Determinare frequenza assoluta e relativa dei due eventi X = "nasce una femmina", Y. = "nasce un maschio".

Elementi di calcolo delle probabilità e di statistica
Eventi. Frequenza . Probabilità

Se gli eventi elementari di uno spazio S h anno tutti la stessa probabilità di realizzarsi, allora questi eventi sono detti equiprobabili.

Se lo spazio S degli eventi è costituito da n eventi equiprobabili

e_1, e_2, …..e_n, allora

$$P(e_1) = P(e_2) = \ldots = P(e_n)$$

E la probabilità di ogni singolo evento è $P(e_i) = \frac{1}{n}$

Esempio. Nell'evento casuale "trasmissione del cromosoma X o y", lo spazio degli eventi è $\{$ X , Y $\}$. Calcolare P(x) P(Y) e la probabilità totale

P(x) = 1/2 P(Y) =1/2 P(x) + P(Y) = 1

Elementi di calcolo delle probabilità e di statistica
Legge dei grandi numeri

Dato uno spazio di eventi S = $\{$ e_1, e_2, …..e_n $\}$ e con probabilità

$$P(e_1), P(e_2), \ldots\ldots, P(e_n)$$

e detta $F_N(e_i)$ la frequenza assoluta della realizzazione di e_i su N prove

con frequenza relativa $f_N(e_i) = \dfrac{F_N(e_i)}{N}$ con cui si realizza e_i su N prove,

la probabilità P che la distanza tra la frequenza relativa e la probabilità di e_i sia maggiore di $\in$ tende a zero all'aumentare del numero delle prove

$$\lim_{N \to \infty} P\left(\left| f_N(e_i) - P(e_i) \right| > \varepsilon\right) = 0$$

Cioè, è poco probabile che, al crescere del numero delle prove effettuate , la frequenza relativa osservata si discosti dalla probabilità dell'evento. Esempio. Lancio di una moneta. Simulazione dello spazio degli eventi su 20 prove, calcolo di P(T) e P(E)

Elementi di calcolo delle probabilità e di statistica
Permutazioni. Combinazioni. Disposizioni

Per determinare il numero di elementi di raggruppamenti diversi di oggetti (o di eventi) possono essere utilizzati alcuni elementi di Calcolo combinatorio.

Ciascun possibile ordinamento di n oggetti (eventi) distinti è detto **permutazione**

Il numero delle permutazioni di n oggetti distinti è n! (n fattoriale)

$n! = n(n-1)(n-2)\ldots.3\cdot2\cdot1$

Esempio. Determinare quali e quanti sono i numeri di 4 cifre, composti con le cifre 3 5 8 1

Dato un insieme di n oggetti, le sequenze ordinate di k elementi ($k \leq n$) in cui un elemento può comparire più volte si chiamano **disposizioni con ripetizione** di n oggetti presi k per volta. Il loro numero è n^k

Esempio. Determinare quali e quanti sono i numeri di cifre, anche ripetute, componibili con le cifre 3 5 8 1

Elementi di calcolo delle probabilità e di statistica
Permutazioni. Combinazioni. Disposizioni

Dati n oggetti distinti, le sequenze ordinate di k elementi ($k \leq n$) in cui un elemento **non** può comparire più volte si chiamano **disposizioni semplici** di n oggetti presi k per volta.

Il numero delle **disposizioni semplici** di n oggetti presi k per volta, è

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \cdot \ldots\ldots \cdot (n-k+1)$$

Esempio. Determinare quali e quanti sono i numeri di cifre componibili con le cifre 3 5 8 1, senza cifre ripetute

Ogni scelta, indipendente dall'ordine, di k elementi ($k \leq n$) da un insieme di n elementi si chiama **combinazione**.

Elementi di calcolo delle probabilità e di statistica
Permutazioni. Combinazioni. Disposizioni

Il numero delle **combinazioni** di n oggetti in gruppi di i k, è

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{k!}$$

Che si chiama **coefficiente binomiale** (si legge: n su k)

Il coefficiente binomiale è utile anche nella determinazione dello sviluppo della potenza ennesimeadel binomio

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^k$$

Esempio. Verificare per calcolare il cubo del binomio.

Elementi di calcolo delle probabilità
Legge dei grandi numeri

Dato uno spazio di eventi S = { e_1, e_2, …..e_n } e con probabilità

$$P(e_1), P(e_2), \ldots\ldots, P(e_n)$$

e detta $F_N(e_i)$ la frequenza assoluta della realizzazione di e_i su N prove

con frequenza relativa $f_N(e_i) = \dfrac{F_N(e_i)}{N}$ con cui si realizza e_i su N prove,

la probabilità P che la distanza tra la frequenza relativa e la probabilità di e_i sia maggiore di $\in$ tende a zero all'aumentare del numero delle prove

$$\lim_{N \to \infty} P\left(\left| f_N(e_i) - P(e_i) \right| > \varepsilon\right) = 0$$

Cioè, è poco probabile che, al crescere del numero delle prove effettuate , la frequenza relativa osservata si discosti dalla probabilità dell'evento. Esempio. Lancio di una moneta. Simulazione dello spazio degli eventi su 20 prove, calcolo di P(T) e P(E)

Elementi di calcolo delle probabilità
Eventi incompatibili. Eventi opposti

Se due eventi sono incompatibili, si ha

$$\text{Se} \quad E_1 \cap E_2 = \varnothing \quad \Rightarrow \quad P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + (E_2)$$

Esempi.

Calcolare la probabilità dell'evento E_1 = " esce un numero pari" nell'insieme S dei possibili esiti del lancio di un dado, determinare un evento composto (un qualunque sottoinsieme dell'insieme di tutti i possibili eventi elementari) incompatibile E_2 e calcolare la probabilità che si realizzi o l'uno o l'altro

Calcolare la probabilità dell'evento opposto a E_3 = " esce 2 o 4" .
Verificare che si ha $P(E^{3C}) = 1 - P(E_3)$

$P(E_1) = 1/3$ $\quad E_2 = \{1, 3, 5,\}$ $\quad P(E_2) = ½$ $\quad P(E_1 \cup E_2) =$

$P(E^{3C} = \{1, 3, 5, 6\}$ $\quad P(E^{3C}) = 4/6$

Verifica: $P(E_3) = 1/3$ $\quad P(E^{3C}) = 1 – 1/3 = 2/3$

Elementi di calcolo delle probabilità
Eventi composti.

Si chiama evento **composto**, un qualunque sottoinsieme dell'insieme di tutti i possibili eventi elementari.

La probabilità di un evento composto è **la somma** delle probabilità degli eventi che lo compongono.

Indichiamo con E, E_1, E_2, tre eventi di uno spazio S

- L'evento E_1 opposto di E, è il **complementare** di E in S

$$E_1 = S \backslash E = E^{1C}$$

- L'evento E = " si verifica E_1 oppure E_2" è l'evento **unione** di E_1 e E_2

$$E = E_1 \cup E_2$$

- L'evento E = " si verificano E_1 e E_2" è l'evento **intersezione** di E_1 e E_2

$$E = E_1 \cap E_2$$

Elementi di calcolo delle probabilità
Eventi incompatibili. Eventi opposti

Due eventi E_1, E_2 sono **incompatibili** se non possono verificarsi contemporaneamente

qual è la probabilità di $E_1 \cap E_2$?

Se due eventi sono incompatibili, la probabilità dell'evento "E = "E_1 oppure E_2

$E = E_1 \cup E_2$ " è data dalla somma delle probabilità di E_1 e E_2

Si ha quindi

$$\text{Se} \quad E_1 \cap E_2 = \varnothing \quad \Rightarrow \quad P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Due eventi opposti E ed $E^C = S_p \backslash E$ sono **incompatibili** e quindi si ha

$(E \cup E^C) = ?$ $\quad P(S_p) = ?$ $\quad 1 = P(S_p) = P(E \cup E^C) = ?$

$1 = P(E \cup E^C) = P(E) + P(E^C)$ considerare l'uguaglianza e determinare quanto vale $P(E^C)$

$$P(E^C) = 1 - P(E)$$

Elementi di calcolo delle probabilità
Eventi incompatibili. Eventi indipendenti

In uno spazio di k eventi, se gli eventi E_1, E_2, ….E_k, sono a due a due incompatibili, allora si ha

Se $E_i \cap E_j = \varnothing \quad \forall\, i, j \Rightarrow \quad P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots\ldots \cup E_k) = P(E_1) + (E_2) + \ldots + P(E_k)$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k) = \sum_{ik=1}^{k} E_i$$

Due eventi E_1 e E_2 sono **indipendenti** se la probabilità che avvengano contemporaneamente è il prodotto delle probabilità dei singoli eventi

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times (E_2)$$

Esempio. Mutazioni Le frequenze con cui possono avvenire le mutazioni nella sequenza del DNA che definisce un gene sono diverse nei vari punti delle sequenza che codifica un gene. Supponiamo in s1 la probabilità che il gene muti sia 1/10, in s2 sia 1/20 e in , s3 sia 1/30, consideriamo nulla la probabilità che il gene muti in altri siti e supponiamo che il fatto che il gene muti in un sito non influenzi la sua possibilità di mutare in un altro sito. Calcolare la probabilità che il gene muti nel primo e nel terzo sito.

Elementi di calcolo delle probabilità
Eventi incompatibili. Eventi indipendenti

Due eventi E_1 e E_2 sono **indipendenti** se la probabilità che avvengano contemporaneamente è il prodotto delle probabilità dei singoli eventi

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times (E_2)$$

Esempio. Mutazioni Le frequenze con cui possono avvenire le mutazioni nella sequenza del DNA che definisce un gene sono diverse nei vari punti delle sequenza che codifica un gene. Supponiamo in s_1 la probabilità che il gene muti sia 1/10, in s_2 sia 1/20 e in , s_3 sia 1/30, consideriamo nulla la probabilità che il gene muti in altri siti e supponiamo che il fatto che il gene muti in un sito non influenzi la sua possibilità di mutare in un altro sito. Calcolare la probabilità che il gene muti nel primo e nel terzo sito e quindi non nel secondo.

Indicato con M l'evento "mutazione" e con NM l'evento "non mutazione" , data l'indipendenza degli eventi, la probabilità si calcola è data dal prodotto delle probabilità

Essendo $P(Ms_1) = 1/10$, in $P(Ms_2) = 1/20$ e $P(Ms_3) = 1/30$, si ha

$P(Ms_1 \cap NMs_2 \cap Ms_3) = ?$

Essendo Ms_2 e NMs_2 'eventi opposti $$\frac{1}{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{20}\right) \cdot \frac{1}{30} = \frac{19}{6000} \approx 0.003$$

Elementi di calcolo delle probabilità
Probabilità condizionate

Dati E ed F due eventi di uno spazio S

La probabilità che si realizzi E sapendo che si realizza F, cioè la **probabilità di E condizionata a F**

è

$$P\left(\frac{E}{F}\right) \cdot = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Cioè, ridurre lo spazio degli eventi a quelli che permettono la realizzazione di F e considerare il peso relativo di dell'evento E nel realizzarsi di F

Segue che
$$P(E \cap F) = P\left(\frac{E}{F}\right) \cdot P(F)$$

La probabilità che si realizzi E insieme ad F è uguale al prodotto della probabilità che si realizzi F per la probabilità che si realizzi E condizionatamente ad F.. Il ruolo di E ed F può essere scambiato.

Gli eventi E ed F sono indipendenti se e solo se P(E/F) = P(E), il fatto che si verifichi F non modifica la probabilità che si verifichi E.

Il ruolo di E ed F può essere scambiato P(F/E) = P(F),

Elementi di calcolo delle probabilità
Probabilità condizionate

Determinazione della probabilità di un evento in presenza di informazioni parziali su di esso

Esempio. Per un gene di alleli A e a, nascono individui con genotipi distribuiti secondo le seguenti probabilità

P(AA) = ¼, P(Aa) = ½ P(aa) = ¼ inoltre se A è dominante gli individui sono di identico fenotipo

Senza un'analisi del DNA, non possiamo sapere se uno degli individui di fenotipo A sia un eterozigote Aa o un omozigote AA. Qual è la probabilità che sia Aa?

Tale probabilità si chiama probabilità condizionata:

Probabilità dell'evento "genotipo Aa" condizionata all'evento "fenotipo A" e si scrive

$$P\left(\frac{Aa}{fn=A}\right) \cdot = \frac{P(Aa)}{P(fn=A)}$$

Calcolare tale probabilità sapendo *che P(fn = A) = ¾*

$$P\left(\frac{Aa}{fn=A}\right) \cdot = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Elementi di calcolo delle probabilità
Formula di Bayes

Rispetto a due coppie di eventi incompatibili T^+ o T^-, e M o S , lo spazio degli eventi è formato da quattro sottoinsiemi

$$T^+ \cap M\ ,\quad T^+ \cap S,\quad T^- \cap M,\quad \text{e } T^- \cap S$$

- Le probabilità condizionate di una coppia di eventi rispetto all'altra sono in presenza di informazioni parziali su di esso

$P(M/ T^+)$, $P(M/ T^-)$,

$P(S/T^+) = 1- P(M/ T^+)$ $P(S/T_-) = 1- P(M/ T^-)$

,Se sono noti i valori di P(M) e $P(T^+)$, *si* può calcolare la probabilità condizionata inversa (i ruoli degli eventi si scambiano) data da

$P(T^+/ M) = : P(M/ T^+) \cdot P(T^+)/ P(M)$, **Formula di Bayes**

Se invertiamo il ruolo dei due eventi, la probabilità condizionata di un evento rispetto all'altro è uguale alla probabilità condizionata inversa moltiplicata per il rapporto delle probabilità complessive degli eventi.

Elementi di statistica. Statistica descrittiva, inferenziale e Modelli per l’incertezza (cap. 12 - 11)

Le variabili numeriche che descrivono risultati di misure sperimentali sono spesso variabili aleatorie, perché ripetendo l’esperimento l’esito della misura può assumere diversi valori con diversi valori di probabilità, la variabile X prende il nome allora di **variabile aleatoria o casuale**.

in alcuni casi si riesce a **formalizzare matematicamente il comportamento di queste variabili** (costruire modelli predittivi) . La legge che associa ad ogni possibile valore di X la probabilità con cui questo valore si osserva prende il nome di legge di distribuzione di probabilità di X. Prima di esaminare alcune tra le leggi più utili nello studio dei fenomeni naturali introduciamo alcuni elementi di statistica

La statistica studia l’insieme delle tecniche necessarie a raccogliere ed elaborare dati (ottenuti sperimentalmente, dall’osservazione) per descrivere fenomeni collettivi. La teoria della probabilità fornisce giustificazione teorica e strumenti matematici allo studio e all’elaborazione dei dati.

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11)

Si chiama **popolazione statistica** l'insieme di tutti gli elementi che si vogliono studiare (individui, animali, vegetali, cellule, caratteristiche delle collettività ..) Numero finito o infinito di elementi: insieme degli abitanti di una città, di una nazione; insieme delle altezze di una popolazione di fascia di età fissata.

Si chiama **campione casuale** una sequenza di elementi scelti a caso dalla popolazione in modo che ogni elemento abbia la stessa probabilità di far parte del campione

Statistica descrittiva : se l'indagine è sulla totalità della popolazione, sintesi quantitativa completa del fenomeno studiato
Statistica inferenziale: studia come e con quale precisione si possono descrivere le caratteristiche di una popolazione se l'indagine viene effettuata su un campione.

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11)

Fissata una popolazione si chiamano **variabili statistiche** tutte le caratteristiche che variano al variare dei componenti delle popolazione. Le variabili che sono espresse qualitativamente sono dette **attributi** (colore degli occhi, della pelliccia, ecc..); quelle che sono espresse quantitativamente sono dette **misurabili**

Dati (informazioni empiriche) e rappresentazioni dei dati

Esempio. Rappresentiamo su un **diagramma di punti,** su **un istogramma (diagramma a blocchi), su un aerogramma** i dati raccolti su una tabella Campione: 10 esemplari di gatto. Varabile misurabile: numero di cuccioli partoriti in un dato periodo.

gat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n.cu	2	1	3	3	4	2	2	1	2	3

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11)

Dati (informazioni empiriche) e rappresentazioni dei dati

Esempio. Rappresentiamo su un **diagramma di punti,** su **un istogramma (diagramma a blocchi), su un aerogramma** i dati raccolti su una tabella
Campione: 10 esemplari di gatto. Varabile misurabile: numero di cuccioli partoriti in un dato periodo.

gat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n.cu	2	1	3	3	4	2	2	1	2	3

diagramma di punti: in un sistema di riferimento cartesiano ogni punto è rappresentato dalla coppia ordinata (g_i, n.cucc)

istogramma (diagramma a canne): i dati sono rettangoli di base costante (ciascuna rappresenta un individuo) altezza uguale al numero di cuccioli di ciascun individuo.

Quale il senso e il procedimento per la rappresentazione su **un aerogramma ?**

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11) Dati e rappresentazioni dei dati

N dimensione del campione, numero totale dei dati raccolti, con $X_1, X_2, ,\ldots, X_n$ i dati, cioè i valori assunti nel campione dalla variabile statistica X

In molti casi i dati sono ripetuti, assumono un numero finito di valori discreti distinti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, $n \leq N$. Indichiamo con F_i il numero di dati uguali ad x_i , (frequenza assoluta) e con $f_i = F_i / N$ la frequenza relativa

Esempio. Campione: 10 esemplari di gatto. Varabile misurabile: numero di cuccioli partoriti in un dato periodo. Determinare frequenza e frequenza relativa

gat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n.cu	2	1	3	3	4	2	2	1	2	3

Varabile misurabile X: numero di cuccioli partoriti in un dato periodo. Valori assunti dalla variabile X sono $X_2 = X_8 = 1$, $X_1 = X_6 = X_7 = X_9 = 2$, $X_3 = X_4 = X_{10} = 3$
$X_5 = 4$, i valori distinti che assume X sono 4 $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$
Calcolare le corrispondenti frequenze assolute

Le corrispondenti frequenze assolute sono : $F_1=2, F_2=4, F_3=3, F_4=1$

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11) Dati e rappresentazioni dei dati

Esempio. Campione: 10 esemplari di gatto. Varabile misurabile: numero di cuccioli partoriti in un dato periodo. Determinare frequenza e frequenza relativa

gat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n.cu	2	1	3	3	4	2	2	1	2	3

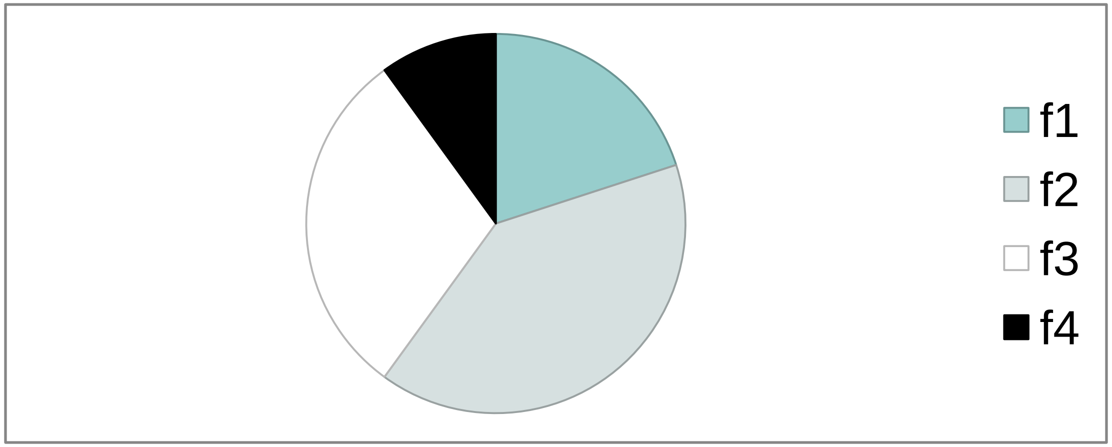
Varabile misurabile X: numero di cuccioli partoriti in un dato periodo. Valori assunti dalla variabile X sono $X_2 = X_8 = 1$, $X_1 = X_6 = X_7 = X_9 = 2$, $X_3 = X_4 = X_{10} = 3$
$X_5 = 4$, i valori distinti che assume X sono 4 $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$
Le corrispondenti frequenze assolute sono : $F_1=2$, $F_2=4$, $F_3=3$, $F_4=1$
La somma delle frequenza assolute = N
Determinare per ciascun valore la frequenza relativa $f_i = F_i / N$ e rappresentare i valori su un aerogramma

Frequenze relative $f_1 = 2/10$ $f_2 = 4/10$
$f_3 = 3/10$ $f_4 = 1/10$

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11) Dati e rappresentazioni dei dati

Determinare per ciascun valore la frequenza relativa $f_i = F_i / N$ e rappresentare i valori su un aerogramma (evidenzia i rapporti di proporzione fra i dati – angoli in proporzione)

gat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n.cu	2	1	3	3	4	2	2	1	2	3



Il 20% delle gatte ha 1 cucciolo
Il 40% ha 2 cuccioli
Il 30% ha 3 cuccioli
Il 10% ha 4 cuccioli

I dati saranno generalizzabili a tutta la popolazione dei gatti?

Frequenze relative $f_1 = 2/10$ $f_2 = 4/10$ $f_3 = 3/10$ $f_4 = 1/10$

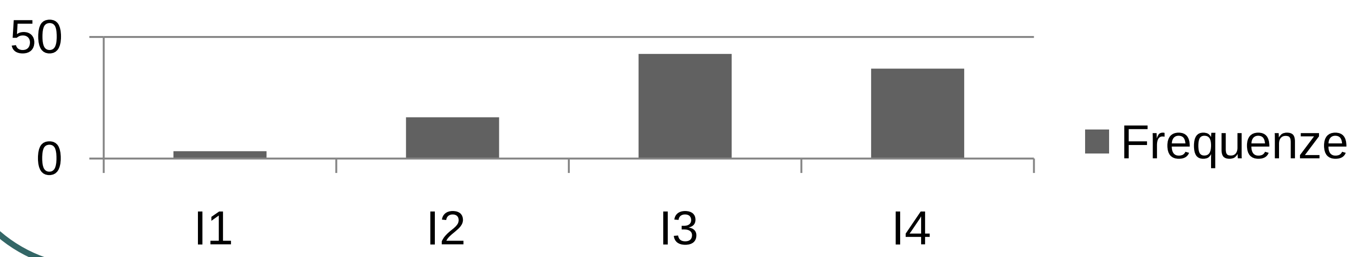
Scrivere i dati in percentuale e disegnare aerogramma

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11)

Riassumere e organizzare i dati: indici numerici che riassumono le principali caratteristiche matematiche dei dati.
Se i dati sono espressi mediante la loro appartenenza a diverse classi (sottoinsiemi), si chiama **classe modale** la classe di frequenza massima, se le classi sono individuate da numeri, il numero che contraddistingue la classe modale prende il nome di **moda.**

Esempio. Altezze in centimetri di un campione di ragazze suddivise in classi
I1 = [150, 154]   I2 = [155, 159]   I3 = [160, 164]   I3 = [165, 169]
di frequenza   F1 = 3,   F2 = 17,   F3 = 43   F4= 37

Determinare, la moda, frequenza relativa e disegnare l'istogramma



Classe modale: I3
La moda è 43

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11) Dati e indici di tendenza centrale

Data una variabile statistica X con $X_1, X_2, ,\dots, X_n$ i dati numerici relativi ad un campionamento, si chiama **media campionaria di X la media aritmetica dei dati**

$$m_X = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$$

Se i dati distinti sono $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, $n \leq \mathrm{N}$ e assumono frequenze F_i si può scrivere in modo equivalente

$$m_X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} F_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{N} x_i = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$$

Si può talvolta preferire la media pesata o ponderata. Se i dati hanno variazioni esponenziali, l'indice più adatto è **la media geometrica**

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11) Dati e indici di tendenza centrale

Data una variabile statistica X con $X_1, X_2, ,\dots, X_n$ i valori campionari numerici (positivi) relativi ad un campionamento. Si chiama **media geometrica**

$$GM_X = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdots X_n}$$

Se i dati distinti sono $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, $n \le \mathrm{N}$ e assumono frequenze assolute F_i si può scrivere in modo equivalente

$$GM_X = \sqrt[n]{x_1^{F_1} \cdot x_2^{F_2} \cdots x_n^{F_n}}$$

Quando la media non è una buona stima riassuntiva, si può usare la mediana

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11) Dati e indici di tendenza centrale

Siano $X_1, X_2, ,\ldots, X_N$ i valori campionari numerici ordinati in modo crescente (non decrescente).

La mediana è il valore centrale (che separa in due parti uguali l'insieme dei dati) che si ottiene con la seguente regola:

Se N è dispari, la mediana è il valore del dato che corrisponde all'intero successivo a N/2

Se N è pari, è la media aritmetica dei valori dei dati al posto N/2 e al posto successivo.

La mediana, contrariamente alla media risente poco della presenza di dati estremi, anche eventualmente errati.

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11) Varianza e deviazione standard

Sia X una variabile statistica, la **varianza campionaria** di N dati $X_1, X_2, ,\ldots, X_N$ aventi media campionaria m_X è il numero

$$s_X^2 = \frac{(X_1 - m_X)^2 + (X_2 - m_X)^2 + \ldots\ldots + (X_N - m_X)^2}{N-1}$$

che valuta la distanza media al quadrato dei dati dalla media, cioè la loro *dispersione*

Se i dati assumono un numero finito di valori discreti distinti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, $n \leq N$ *e* con frequenza assoluta si definisce

$$s_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i (x_i - m_X)^2}{N-1}$$

La radice quadrata della varianza

è la **deviazione standard campionaria** $s_X = \sqrt{s_X^2}$

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11) Varianza e deviazione standard

Esercizio 12.6

Si eseguono alcune misure di una grandezza X e si rilevano i seguenti risultati con le frequenze indicate sotto

X	0	1.3	1.2	0.3	3.4	0.5	1.6	4.7	0.8	2.9
F	2	6	12	9	19	39	42	39	21	11

Calcolare la media, la varianza, la varianza campionaria e la deviazione standard

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11) Varianza e deviazione standard

Se i dati a disposizione riguardano un'intera popolazione (non un campione)

Si usano simboli differenti nelle definizioni degli indici di tendenza centrale.

Indichiamo con $y_1, y_2, \ldots, y_M$ i dati relativi a tutti gli individui di una popolazione

La *media* di popolazione è il numero

$$\mu = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} y_i$$

La **varianza** di popolazione è il numero

$$\sigma^2 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(y_i - \mu)^2$$

La **deviazione standard di popolazione** $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

La deviazione standard viene chiamata anche scarto quadratico medio.

Per N abbastanza grande la diversità tra la **varianza campionaria (varianza stimata) e la varianza** di popolazione (varianza) diventa trascurabile.

Analogo risultato si ha per la deviazione standard

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11) Varianza e deviazione standard

- Esempio

Calcoliamo le deviazioni standard dei seguenti dati considerati come dati di un'intera popolazione. Sia X l'insieme delle altezze degli atleti di una squadra di calcetto

X = {176,181,168,176,172}. Calcolare la media, la varianza e la deviazione standard

$$\mu = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} y_i \qquad \mu = \frac{1}{5}(176+181+168+176+172) = 174.6$$

Media

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(y_i-\mu)^2 \qquad \sigma^2 = \frac{1}{5}\left(1.4^2 + 6.4^2 + (-6.6)^2 + 1.4^2 + (-2.6)^2\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}(1.96+40.96+43.56+1.96+6.76) = \frac{95.6}{5} = 19.1$$

Deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \qquad \sigma = \sqrt{19.1} \cong 4.37$$

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12 - 11) Varianza e deviazione standard

La **varianza** si può anche calcolare con la formula (di König)

$$\sigma^2 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(y_i - \mu)^2 \qquad \sigma^2 = \left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} y_i^2\right) - \left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} y_i\right)^2$$

Verificare l'uguaglianza a partire dai dati X = {176,181,168,176,172}.

N dati considerati come dati di un'intera popolazione X = $\{ X_1, X_2, \ldots, X_N \}$, o di N osservazioni empiriche possono essere considerati come vettori. Gli indici di tendenza centrale, o di dispersione definiti utilizzando gli strumenti dell'algebra dei vettori. Gli stessi indici possono anche essere definiti in termini probabilistici.
La trattazione in questi diversi ambiti matematici non è oggetto di questa trattazione.

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12) **informazioni statistiche, campione e popolazione**

Le informazioni statistiche dedotte da un campione si possono estendere a tutta la popolazione da cui il campione è tratto se il campione è casuale e se è sufficientemente ampio.

Con gli strumenti del calcolo delle probabilità si descrive m_N, (media campionaria) in presenza di dati di un campione o di dati empirici (attraverso lo studio delle leggi di distribuzione) , la statistica inferenziale tende a determinare μ (media di popolazione)

Nelle affermazioni su μ che non si conosce, a partire dal valore osservato (conosciuto, calcolato a partire da dati empirici o sul campione considerato) di m_N si parla di livello di fiducia

Gli intervalli in cui si riesce a stimare un parametro della popolazione sono chiamati **Intervalli di confidenza (o fiduciari).** Nel caso della media , si considerano i seguenti intervalli standard

$$\mu \in \left(m_N - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, m_N + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right)$$ con un livello di fiducia del 95%

$$\mu \in \left(m_N - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, m_N + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right)$$ con un livello di fiducia del 99%

$$\mu \in \left(m_N - 3.29\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, m_N + 3.29\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right)$$ con un livello di fiducia del 99.9%

In statistica in genere si considerano più di una variabile come attributo significativo di una popolazione o di un campione. In particolare interessa sapere se i dati relativi ad una variabile siano o no in relazione con quelli di un o più variabili raccolti sulla stessa popolazione (o campione o da esperienze empiriche) . Si usa in questo caso un altro indice detto di **covarianza**

Date due variabili relative ad una popolazione di dimensione N,

X = $\{X_1, X_2, ,\ldots, X_N\}$ e $Y = \{Y_1, Y_2, ,\ldots, Y_N\}$ si definisce covarianza il numero

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - m_X)\cdot(Y_i - m_Y)$$

Se i dati sono un campione estratto da una popolazione, si definisce covarianza campionaria

$$s_{XY} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - m_X)\cdot(Y_i - m_Y)$$

La covarianza è un indice analogo alla varianza

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12) Covarianza e Correlazione tra variabili

Consideriamo il piano cartesiano diviso i quattro quadranti da due rette passanti per il punto di coordinate (m_X, m_Y)

$$s_{XY} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_1 - m_X)\cdot(Y_1 - m_Y)$$

I = $\{x \geq m_X, y \geq m_Y\}$

II = $\{x < m_X, y \geq m_Y\}$

III = $\{x < m_X, y < m_Y\}$ I V = $\{x \geq m_X, y < m_Y\}$

Se un punto di coordinate (X_i,Y_i), appartiene al I o al III quadrante il prodotto (X_i – m_X) (Y_i- m_Y) è positivo, se appartiene al II o IV quadrante il prodotto è negativo

Se al crescere di x i valori di y aumentano, il valore della covarianza è positivo

Se invece al crescere di x i valori di y diminuiscono, il valore della covarianza è negativo: se i punti si trovano min posizione uniformemente distribuita attorno al baricentro dei dati, allora

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - m_X)\cdot(Y_i - m_Y)$$ è vicina a zero

Consideriamo i dati di due popolazioni A e B relativi per ciascuna a due variabili X e Y

Determinare la **covarianza** e verificare la coerenza con la distribuzione dei punti nel piano

A	X	1	2	3	0	4	3
	Y	2	3	3	1	2	4

$m_X = 13/6$
$m_Y = 5/2$

B	X	3	0	1	4	2	0
	Y	1	1	3	1	0	4

$m_X = 5/3$
$m_Y = 5/3$

Per la popolazione A $\sigma_{XY} = 3/4$

Per la popolazione B $\sigma_{XY} = -10/9$

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12) covarianza e Correlazione tra variabili

Si chiama **coefficiente di correlazione** di due distribuzioni di dati $X = \{X_1, X_2, ,\dots, X_N\}$ e $Y = \{Y_1, Y_2, ,\dots, Y_N\}$ il numero

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Il coefficiente di correlazione verifica la relazione $-1 \le \rho_{XY} \le 1$

Non vi è correlazione se $\rho_{XY} \approx 0$

La massima correlazione positiva è 1. La massima correlazione negativa è -1

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12) covarianza e Correlazione tra variabili

La massima correlazione positiva (ρ =1) si ha se i valori delle due variabili sono in relazione lineare crescente cioè se soddisfano la relazione

$Y_i = a X_i + b$, con $a > 0$

La massima correlazione negativa (ρ = - 1) si ha se i valori delle due variabili sono in relazione lineare decrescente, cioè se soddisfano la relazione

$Y_i = a X_i + b$, con $a < 0$

Il coefficiente di correlazione verifica la relazione $-1 \le \rho_{XY} \le 1$

Non vi è correlazione se $\rho_{XY} \approx 0$

Esempio. Verificare che le due variabili X e Y hanno correlazione massima

X	1	0	2	4
Y	0	-1.5	1.5	4.5

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12) Retta di regressione

La massima correlazione positiva (ρ =1) o negativa, si ottiene solo in casi ideali.

Nei casi della pratica sperimentale , si cerca di trovare la retta migliore che descrive la distribuzione dei dati.

La retta più usata è la retta di regressione che ha equazione

$$y = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} x + \left(m_Y - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} m_X \right)$$

Si usa la scala logaritmica (che trasforma l'esp. in funz. lineare) se le variabili sono legate da leggi esponenziali

Esempio. Determinare i valori di m_X , m_Y , dei coefficienti di correlazione e la retta di regressione . Verificare che le due variabili X e Y dell'esempio precedente hanno correlazione massima

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12) Retta di regressione

Ultima lezione

- (cap. 12) 12. 4 Ipotesi Statistiche
- (cap. 11) 11.1. Distribuzione binomiale

Esempio 11.8

- (cap. 11) 11.2. e 11.3   NO
- (cap. 11) 11.5. variabili continue solo definizione senza formule di densità e distribuzione esponenziale
- (cap. 11) 11.6. Distribuzione normale e 11.7   solo esempi posto come problemi applicativi da riprendere nelle esercitazioni del 20 e 25

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 11) Modelli . Distribuzione binomiale

I risultati di misure sperimentali, sono in molti casi descritti da variabili numeriche casuali (aleatorie). Ripetendo l'esperimento l'esito della misura può assumere diversi valori, con diverse probabilità.

La legge che associa, ad ogni possibile valore della variabile aleatoria X, la probabilità con cui questo valore si osserva si chiama

legge di distribuzione di probabilità di X

Distribuzione binomiale. Utilizzata quando si hanno prove o esperimenti che vengono ripetuti molte volte e, nel corso di ciascuna prova, un certo risultato può verificarsi o no. L'uso della legge di distribuzione binomiale richiede che siano verificate tre condizioni:

- gli esiti della singola prova devono essere **due soli eventi incompatibili (S, I)**
- **ciascuna delle n prove** ripetute deve essere **indipendente dalle altre**
- **la probabilità di S (uno degli eventi) è invariante da una prova all'altra**

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 11) Modelli . Distribuzione binomiale

Supponiamo che l'esito di una prova preveda la realizzazione di due soli risultati convenzionalmente detti S (successo) I (insuccesso). Incompatibili tra loro e quindi tali che lo spazio degli eventi è S = { S, I}

Se la probabilità di S è P(S) = p allora la probabilità di I è

$$P(I) = 1 - P(S) = 1 - p = q$$

Sia *X* la variabile aleatoria che conta il numero di successi osservati eseguendo n prove indipendenti. *X* può assumere solo valori interi compresi fra *0* e *n.* La distribuzione di probabilità di *X* si chiama **distribuzione binomiale** ed è data da

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Si ha che

$$\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = ? \qquad \sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

Esempio. *Un antibiotico viene sperimentato su una cultura batterica e si trova che riesce a distruggere la colonia di batteri una volta su 5. Si ripete l'esperimento su 3 colture. Calcolare la probabilità che "una colonia sopravviva"*

Si può usare la distribuzione binomiale perché sono verificate le tre condizioni:

- gli esiti della singola prova sono due soli eventi incompatibili (S = la coltura sopravvive, D = la coltura viene distrutta)
- ciascuna delle 3 prove è indipendente dalle altre (3 colture diverse)
- la probabilità di S è $p = P(S) = 4/5$ è invariante da una prova all'altra (la probabilità di D è $q = P(D) = 1/5$)

Se X è la variabile che conta il numero di S su tre prove, la probabilità che una sola coltura sopravviva è

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \qquad P(X=1)=\binom{3}{1}p^1 q^{3-1}=\binom{3}{1}pq^2=\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{3}{1!}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{25}=\frac{12}{125}=0.096$$

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 11) Modelli . Distribuzione binomiale

Esempio 1 . *Un antibiotico viene sperimentato su una cultura batterica e si trova che riesce a distruggere la colonia di batteri una volta su 5. Si ripete l'esperimento su 3 colture. Calcolare la probabilità che "una colonia sopravviva"*

Se X è la variabile che conta il numero di S su tre prove, la probabilità che una sola coltura sopravviva è

$$P(X=1)=\binom{3}{1}p^1q^{3-1}=\binom{3}{1}pq^2=\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{3}{1!}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{25}=\frac{12}{125}=0.096$$

Esempio 2 . *Un antibiotico viene sperimentato su una cultura batterica e si trova che riesce a distruggere la colonia di batteri una volta su 5. Si ripete l'esperimento su 3 colture. Calcolare la probabilità* ***che "almeno una colonia sopravviva" e la probabilità che "le colonie vengano tutte distrutte"***

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale
Variabili continue. Distribuzione normale

In analogia con quanto detto per gli indici di centralità delle frequenze, si possono definire la media aritmetica, il valore atteso, la varianza e la deviazione standard, di una variabile aleatoria X (cap. 11 paragrafi 11.2 -11.3 trattazione non affrontata)

Altre leggi di distribuzioni di variabili discrete: geometrica, di Poisson (paragrafo 11.4) non sono oggetto di questa trattazione.

Sono invece leggi di distribuzione di probabilità associate a variabili aleatorie continue (che possono assumere infiniti valori in modo continuo o valori discreti numerosi tanto da rendere più comoda la trattazione considerandoli come se fossero continui): distribuzione uniforme, esponenziale (paragrafo 11.5 trattazione non affrontata) e la distribuzione normale.

La distribuzione di probabilità dei fenomeni naturali misurabili è **la distribuzione normale, (**rappresentata dalle curva normale o gaussiana). La distribuzione normale della variabile aleatoria X è data dalla funzione dipendente dai parametri m e σ cioè dalla media e dalla deviazione standard

$$N_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale
Variabili continue. Distribuzione normale standardizzata

La curva $N_{m,\sigma}$ ha un massimo relativo in x = m, due punti di flesso in m - σ e m + σ, l'asse delle x è un asintoto orizzontale. Poiché σ è la deviazione standard, più piccolo è il valore che assume questo parametro più i valori sono concentrati intorno al valor medio.

Verificare tracciando il grafico per m = 0 e rispettivamente σ = 1/3, σ = 1 , σ = 3

Nel caso particolare di m = 0 e σ = 1 , la distribuzione è denominata **distribuzione normale standardizzata**. La variabile aleatoria è indicata con Z.

$$N_{0,1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2}} e^{-\frac{z^2}{2^2}}$$

Una variabile gaussiana X è legata alla variabile aleatoria normale standardizzata Z dalla relazione

$$Z = \frac{(X - m)}{\sigma}$$

Al crescere del numero delle prove N si hanno i seguenti risultati:
La differenza tra la frequenza relativa f_N e la probabilità è dell'ordine di $\frac{1}{\sqrt{N}}$

La differenza tra la frequenza assoluta e la frequenza attesa è dell'ordine di $\sqrt{N}$

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale
Variabili continue. Distribuzione normale

La probabilità che la variabile aleatoria, distribuita con legge normale, sia compresa tra due valori *a* e *b* è data dall'integrale definito di estremi *a* e *b* della funzione $N_{m,\sigma}$

Cioè

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b N_{m,\sigma}(x)dx$$

L'integrale non può essere espresso con funzioni elementari ma deve essere valutato con strumenti di calcolo numerico. Tale valore è l'area della regione compresa tra l'asse delle X e il grafico della funzione

Nei casi più usuali, le stime seguenti danno, in funzione dei valori della media m e dalla deviazione standard σ, informazioni sulla probabilità di X

$$P(-\sigma \le X - m \le \sigma) \approx 0.6826895$$
$$P(-2\sigma \le X - m \le 2\sigma) \approx 0.9544997$$
$$P(-3\sigma \le X - m \le 3\sigma) \approx 0.9973002$$
$$P(-4\sigma \le X - m \le 4\sigma) \approx 0.9999367$$

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12) Ipotesi Statistiche

La statistica inferenziale studia le tecniche di verifica delle ipotesi.

Un test statistico è una procedura che serve a verificare se un dato è in accordo con una teoria e si articola secondo la seguente procedura

- Si formula l'ipotesi da verificare, indicata convenzionalmente con H_0 e chiamata **ipotesi nulla**
- Ipotizzando che H_0 sia vera si calcola la probabilità di ottenere un risultato estremo quanto o più di quello osservato. Il valore *p* prende il nome di **valore *p* del test**
- Si valuta *p* e se questo valore è troppo piccolo, si rifiuta l'ipotesi H_0 , se è grande la si accetta.

Nella pratica statistica i valori di p che conducono ad accettare l'ipotesi nulla H_0 (cioè a considerarla vera) o a rifiutarla (cioè a considerarla falsa) sono fissati per convenzione.

Il valore di p è il livello di fiducia del test.

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12) Ipotesi Statistiche

Nella pratica statistica i valori di p che conducono ad accettare l’ipotesi nulla H_0 (cioè a considerarla vera) o a rifiutarla (cioè a considerarla falsa) sono fissati per convenzione.

Se $p \geq 0.05$ la discrepanza tra il dato osservato e il valore atteso non è statisticamente significativa, In questo caso l’ipotesi nulla viene accettata.

Se $p < 0.05$ H_0 viene in genere rifiutata, in particolare:

- se $0.01 \leq p < 0.05$ la discrepanza tra dato osservato e valore atteso è detta **statisticamente significativa**
- se $0.001 \leq p < 0.01$ la discrepanza è detta statisticamente **molto significativa**
- se $p < 0.001$ la discrepanza è detta statisticamente **estremamente significativa**

I valori 0.05, 0.01, 0.001, sono chiamati livelli di significatività del test.

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12) Ipotesi Statistiche – Test del “Chi quadro”

Il test del χ^2 “Chi quadro” confronta l’accordo (o adattamento) fra frequenza osservata e frequenza attesa di dati organizzati in n categorie qualitative. Viene anche usato per la verifica dell’indipendenza tra variabili.

Consideriamo un campione di dimensione N estratto da una popolazione

E siano F_1, F_2, …, F_N, le frequenze osservate. Se le frequenza relative delle diverse categorie sono q1, q2, …, qn, (ipotesi nulla) i valori attesi delle frequenze sono Ei = Nqi. La statistica del test è il numero

Per valutare se l’ipotesi nulla sia da accettare bisogna riferirsi alla legge di distribuzione della variabile aleatoria χ^2 . Il valore p del test sono dati in relazione ai livelli di significatività del 10%, 5%, 1% e 0.1%

In tabelle che riportano

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12) Ipotesi Statistiche – Test del "Chi quadro"

Il test del χ^2 "Chi quadro" confronta l'accordo (o adattamento) fra frequenza osservata e frequenza attesa di dati organizzati in n categorie qualitative. Viene anche usato per la verifica dell'indipendenza tra variabili.

Consideriamo un campione di dimensione N estratto da una popolazione

E siano F_1, F_2, …, F_N, le frequenze osservate. Se le frequenza relative delle diverse categorie sono q_1, q_2, …, q_n, (ipotesi nulla) i valori attesi delle frequenze sono $E_i = Nq_i$. La statistica del test è il numero

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(F_i - E_i)^2}{E_i}$$

Per valutare se l'ipotesi nulla sia da accettare bisogna riferirsi alla legge di distribuzione della variabile aleatoria χ^2 . Il valore p del test sono dati in relazione ai livelli di significatività del 10%, 5%, 1% e 0.1% e al numero di variabili indipendenti che entrano nella definizione di χ^2 (gradi di libertà)

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12) Ipotesi Statistiche – Test del “Chi quadro”

Consideriamo un campione di dimensione N estratto da una popolazione e siano F_1, F_2, …, F_N, le frequenze osservate. Se le frequenza relative delle diverse categorie sono q_1, q_2, …, q_n, (ipotesi nulla) i valori attesi delle frequenze sono $E_i = Nq_i$. La statistica del test è il numero

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(F_i - E_i)^2}{E_i}$$

Tabella dei valori della variabile aleatoria χ^2 in relazione ai livelli di significatività, g indica il numero di variabili indipendenti (gradi di libertà)

g	10%	5%	1%	0.1%
1	2.71	3.84	6.63	10.83
2	4.61	5.99	9.23	13.82
3	6.25	7.81	11.24	16.27
4	7.78	9.49	13.28	18.47

Esempio 12.30 Il test del χ^2 “Chi quadro” per i risultati di Mendel

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(F_i - E_i)^2}{E_i}$$

Incrociando piante da due linee pure “ a fiore rosso” e a “fiore bianco” si ha il seguente dato osservativo 705 piante a fiore rosso e 224 a fiore bianco. Per la prima legge di Mendel il rapporto

$$\frac{\text{fenotipo dominante (rosso)}}{\text{fenotipo recessivo (bianco)}} = \frac{3}{1}$$

In questo caso il rapporto è 705/224 = 3.15

Verifichiamo se i valori ottenuti sono in accordo con l’ipotesi nulla che la probabilità di ottenere piante a fiore rosso sia ¾ e quella di ottenere piante a fiore bianco sia ¼ attraverso il test del χ^2

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12) Ipotesi Statistiche – Test del “Chi quadro”

Esempio 12.30 Incrociando piante da due linee pure “ a fiore rosso” e a “fiore bianco” si ha il seguente dato osservativo 705 piante a fiore rosso e 224 a fiore bianco. La dimensione del campione è N = 705 + 224 = 929.

I valori attesi e gli scarti sono riassunti nella tabella

	R	B
Dati	705	224
Valori attesi	696.75	232.25
Scarti	8.25	- 8.25

Calcolare il valore di $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(F_i - E_i)^2}{E_i}$$

e stabilire sulla base dei dati della tabella, se l’ipotesi nulla

è da accettare o da rifiutare. Osserviamo che le due variabili B e R non sono indipendenti essendo per esempio, fissato B il valore di R = N – B. quindi dovremo considerare un grado di libertà

Elementi di statistica. Statistica descrittiva e inferenziale (cap. 12) Ipotesi Statistiche – Test del “Chi quadro”

Esempio 12.30

	R	B
Dati	705	224
Valori attesi	696.75	232.25
Scarti	8.25	- 8.25

Il valore di $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(F_i - E_i)^2}{E_i}$$

risulta $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(F_i - E_i)^2}{E_i} = \sum_{i=1}^{2} \frac{(F_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(8.25)^2}{696.75} + \frac{(-8.25)^2}{232.255} \approx 0.39$$

l’ipotesi nulla è da accettare perché confrontando i dati della tabella per g=1 perché 0.39 < 2.27 che corrisponde al livello di significatività del 10 %

Esercizi in preparazione dell’esame

Ripresi nelle esercitazioni di lunedì 24 (15-18) e martedì 25 (9-11). Esempi di quesiti delle prove scritte. Simulazione di prove d’esame I e II modulo

(si vedano quesiti di riepilogo, testi di simulazione dell’esame, esercizi svolti dal tutor)

Date esami parziali

3 giugno 11-13 (I Modulo)

8 giugno 9-11 (II Modulo)

Giugno 23 (orario da definire)

Luglio 13 9-11

Attività tutoria martedì 1 giugno ore 11.00-13.00

Tutti i mercoledì ore 11.00 – 13.00 e 15.00-17.00