LAUREA IN SCIENZE NATURALI (CLASSE L-32)

LAUREA IN SCIENZE GEOLOGICHE (CLASSE L-34)

Lezioni del I semestre – A.A. 2011/2012
Matematica con elementi di statistica
(I parte) - 5 crediti – 40 ore di lezione frontale

I lezione 4.10.11

Docente Maria Polo

Dipartimento di Matematica e Informatica,
Via Ospedale 72 - Cagliari

e-mail: mpolo@unica.it tel 070 675 8528

1° anno - I semestre					
	Lunedì	**Martedì Dip. Sc. Terra**	**Mercoledì Monserrato**	**Giovedì**	**Venerdì Monserrato**
9:00-10:00		Matematica e statistica (Aula Magna)			
10:00-11:00					
11:00-12:00					Matematica e statistica (Aula C)
12:00-13:00					
14:30-15:30	Corsi di riallineamento MATEMATICA Da confermare (Aula C)				
15:30-16:30	Corsi di riallineamento MATEMATICA Da confermare (Aula C)				
16:30-17:30					
17:30-18:30					

Orario settimanale Lezioni

Esercitazioni tenute dal Tutor

30 ore

inizio 24 ottobre

Propedeuticità
Matematica con elementi di statistica è propedeutica a tutti gli insegnamenti del 3° anno

- **Obiettivi dell'insegnamento**
  Acquisire le capacità per saper affrontare un problema scientifico utilizzando strumenti e modelli matematici e statistici.

- **Conoscenze (sapere)**

Teoria degli insiemi. Numeri reali**.** Vettori e geometria analitica. Successioni e Progressioni. Funzioni in una variabile. Calcolo differenziale.

Integrale di funzioni in una variabile**.**

Matematica con elementi di statistica (I parte)

- **Abilità/Capacità (saper fare)**
- Risolvere problemi di aritmetica e geometria elementare. Saper operare in ambito algebrico e con gli strumenti elementari del calcolo vettoriale e della geometria analitica. Determinare e descrivere l'andamento di successioni; determinare e descrivere il grafico di funzioni di una variabile. Saper calcolare derivata e integrale delle funzioni elementari di una variabile reale. Saper affrontare un problema scientifico utilizzando gli strumenti matematici e statistici
- **Comportamenti (saper essere)**
- Essere in grado di individuare gli strumenti matematici atti alla descrizione di fenomeni naturali elementari. Essere in grado di comprendere e risolvere problemi applicativi delle scienze naturali, attraverso l'utilizzo consapevole e autonomo delle conoscenze acquisite.

Testi di riferimento

- 1. **D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, Matematica per le scienze della vita, Ambrosiana, 2008**

- 2. S. Montaldo, A. Ratto, **Matematica: 2^3 capitoli per tutti** Liguori, 2011

- 3. Pagani, Salsa, Matematica per i Diplomi universitari, Masson, 1997

- **4. Invernizzi, Matematica nelle Scienze Naturali, Libreria Goliardica Editrice, 1996**

I testi sono consultabili presso l'aula 16 e la biblioteca del Dipartimento di Matematica e Informatica

Modalità d’esame

Due prove scritte in itinere (una a metà corso, DATA DA STABILIRE una a fine corso). Gli studenti che avranno superato nel complesso le prove in itinere sono ammessi alla prova orale. La prova orale può essere di due forme:

- Prova di conferma. In questo caso lo studente viene interrogato sugli esiti del suo elaborato e avere confermato il voto dello scritto.
- \- Colloquio integrativo. In questo caso lo studente viene interrogato sugli esiti del suo elaborato e su tutti gli altri argomenti del programma. Il colloquio è finalizzato al miglioramento della votazione finale rispetto a quella dello scritto.

- Se la prova orale non è sufficiente lo studente dovrà ripetere la stessa. Se lo studente fallisce per due volte la prova orale dovrà ripetere la prova scritta.
- Gli studenti che non superano le prove in itinere potranno sostenere una delle prove scritte generali pubblicate nel sito del corso.

Possono sostenere le prove in itinere anche gli studenti non matricole

Dettaglio degli argomenti prime quattro lezioni

- **Teoria degli insiemi.** Simboli ed elementi di logica matematica. Nozioni sugli insiemi. Operazioni tra insiemi. Prodotto cartesiano. Funzioni tra insiemi, dominio, codominio. Funzioni iniettive, suriettive e biiettive. Funzione inversa e funzioni composte
- **Numeri reali**. Numeri naturali. Numeri Interi. Numeri razionali. Numeri reali. Potenze e radici. Valore assoluto. Logaritmi. Rappresentazione decimale dei numeri reali.

Matematica e applicazioni

- E1. Quante strette di mano contiamo se 15 invitati ad una festa se si vogliono salutare tutti una volta?

- E2. In quanti modi posso sistemare 15 campioni di roccia in un classificatore che ne contiene due per volta?

Stesso quesito? Stesso problema matematico?

Il linguaggio della matematica: formule e simboli

- Quante strette di mano contiamo se 15 invitati ad una festa se si vogliono salutare tutti una volta?

Combinazioni di n oggetti presi a due a due

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots . \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Combinazioni e Disposizioni

$$\binom{15}{2} = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{2 \cdot 1 \cdot 13!} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 15 \cdot 7 = 105$$

LAUREA IN SCIENZE NATURALI (CLASSE L-32)

LAUREA IN SCIENZE GEOLOGICHE (CLASSE L-34)

Lezioni del I semestre – A.A. 2011/2012
Matematica con elementi di statistica
(I parte) - 5 crediti – 40 ore di lezione frontale

II lezione 7.10.11

Docente Maria Polo

Dipartimento di Matematica e Informatica,
Via Ospedale 72 - Cagliari

e-mail: mpolo@unica.it tel 070 675 8528

Il linguaggio della matematica: formule e simboli

- Quante strette di mano contiamo se 15 invitati ad una festa se si vogliono salutare tutti una volta?

Combinazioni di n oggetti presi a due a due

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots . \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\binom{15}{2} = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{2 \cdot 1 \cdot 13!} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 15 \cdot 7 = 105$$

Il linguaggio della matematica: formule e simboli

Strategie diverse , formule equivalenti

Combinazioni di n oggetti presi a due a due

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{15}{2}=\frac{15!}{2!(15-2)!}=\frac{15\cdot 14\cdot 13!}{2\cdot 1\cdot 13!}=\frac{15\cdot 14}{2}=15\cdot 7=105$$

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot((n-2)!)}{2\cdot 1\cdot(n-2)!}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

Formula per determinare la somma dei primi (n-1) numeri naturali

La formula si può esprimere sinteticamente utilizzando il simbolo di sommatoria

$$\sum_{l=1}^{n-1} l=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

Esercizio: scrivere la formula per determinare la somma dei primi n numeri naturali

Il linguaggio della matematica: formule e simboli

Quesiti diversi

- E2. In quanti modi posso sistemare 15 campioni di roccia in un classificatore che ne contiene due per volta?

Abbiamo bisogno di altre informazioni per rispondere al quesito

Combinazioni : non interessa l'ordine con cui sono scelti gli oggetti

$\{A, B\} = \{B, A\}$

Disposizioni: si deve tenere conto dell'ordine con cui sono scelti gli oggetti

$(A, B) \neq (B, A)$

Prerequisiti
Esempi tratti da test degli anni scorsi

$$P(a) = a^3 - a^2 - 3a + 1$$

$$P\left(\sqrt{2}\right) = ?$$

$P\left(\sqrt{2}\right) = -1 - \sqrt{2}$

$P\left(\sqrt{2}\right) = -1 + \sqrt{2}$

$P\left(\sqrt{2}\right) = 3 - \sqrt{2}$

$P\left(\sqrt{2}\right) = 3 + \sqrt{2}$

$$a^2 + b^2 = 58 \quad \wedge \quad ab = -21 \Rightarrow (\mathrm{a} - b)^2 = ?$$

$(\mathrm{a} - b)^2 = 16$? $(\mathrm{a} - b)^2 = 100$

Prerequisiti
Esempi tratti da test degli anni scorsi

$$\sqrt{27}+\sqrt{12}=$$

$\sqrt{75}$

$\sqrt{69}$

$\sqrt{78}$

$\sqrt{50}$

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Per quali valori di a e b ?

Quante sono le soluzioni reali del sistema?

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2y^2=1 \end{cases}$$

$\mathrm{A}=2$

$\mathrm{B}=8$

$\mathrm{C}=4$

$\mathrm{D}=1$

$\mathrm{E}=0$

Proprietà sempre verificate - Controesempi

Prerequisiti
Esempi tratti dalla prova di settembre 2010

Se a > 0 è un numero fissato, dire quale tra i seguenti è l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$a^2 - ax^2 > 0$$

- A. L'insieme dei numeri reali
- B. L'insieme vuoto
- C. L'insieme dei numeri reali x tali che $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$
- D. L'insieme dei numeri reali x tali che $x < -\sqrt{a} \text{ oppure } x > \sqrt{a}$
- E. L'insieme dei numeri reali x tali che $0 < x < \sqrt{a}$

Elementi di teoria degli insiemi

- Definizione. Un insieme è una collezione di oggetti, determinati e distinti, della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico. Tali oggetti si dicono elementi dell'insieme.

- Indichiamo gli insiemi con le lettere A,B,C,D. . .
- e gli elementi di un insieme con le lettere a, b, c, d . . .

- Se a è un elemento di A si scrive

  $a \in A$ (a appartiene ad A)
- Se b non è un elemento di A si scrive

  $b \notin A$ (b non appartiene ad A)

Identificare o definire un insieme

- **Per elencazione**

$$A = \{0,1, 2, 3, 4, 5\}$$

- **Proprietà caratteristica** (proprietà comune a tutti gli elementi dell'insieme)

$$A = \{n\colon n \in N \wedge n \leq 5\}$$

A è l'insieme degli *n* tali che *n* è un numero Naturale e (contemporaneamente)

$n \leq 5$, *n* minore o uguale a 5

Identificare o definire un insieme

- **Proprietà caratteristica** *P(x)*

$$A = \{x: x \in X \wedge P(x)\}$$

P(x) è una proprietà vera per ogni elemento di A ($\forall x \in A$ – $\forall$: quantificatore universale)

P(x) è una proprietà falsa (che non è verificata) per ogni elemento che non appartiene ad A ($\forall x \notin A$)

Fissando il valore di x , *P(x) può essere vera o falsa*

Esempio:

$$P(x) = x > \sqrt{2}$$

vera per *x=3,5* *falsa per x=1*

Trovare altri due valori per i quali *P(x)* è vera, *P(x)* è falsa

Identificare o definire un insieme
Proprietà caratteristiche e notazioni (quantificatori)

- $\forall x$ *per ogni x*

  quantificatore universale significa *per ogni x*, *qualunque x*

- $\exists x$ esiste *x*

quantificatore esistenziale significa esiste almeno un *x*

- $\exists!\, x$ *esiste unico*

quantificatore esistenziale significa esiste un solo *x*

Identificare o definire un insieme
Proprietà caratteristiche e notazioni
Esempi

- Quali elementi appartengono all'insieme?

A = {*x: x* $\in$ *N* $\wedge$ *P(x)= i possibili risultati del lancio di un dado*}

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

B = {*x:* $x \in \Re$ $\wedge$ *P(x)= |x|* $\geq$ *0* }

B = insieme di tutti i numeri reali

C = {*x: x* $\in$ *N* $\wedge$ *P(x)= x< 0*}

C = $\emptyset$ C è l'insieme vuoto : insieme che non contiene alcun elemento, non esiste nessun numero naturale *n* che verifica la proprietà *P(x)*

Operazioni con gli insiemi

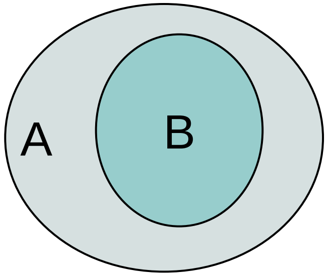
- Un insieme **B si dice sottoinsieme di A** se ogni elemento di B è anche un elemento di A e si indica con

$B \subseteq A$ (B è incluso in A).

ogni sottoinsieme è un sottoinsieme banale di se stesso $A \subseteq A$.

- Se un sottoinsieme B e strettamente contenuto in A, cioè esistono elementi di A che non appartengono a B (esiste almeno un elemento di A che non appartiene a B), si scrive

$B \subset A$ (B è strettamente incluso in A).



- Due insiemi per i quali valgono contemporaneamente **$B \subseteq A$ e $A \subseteq B$ si dicono uguali.**

Sottoinsiemi e relazione di inclusione nella Sistematica o Tassonomia

- Identificare le diverse specie viventi e dare loro un nome universalmente accettato
- Fare un elenco di tutte le specie viventi sulla terra e raggrupparle in classi progressivamente più estese (problema aperto)

Alcuni livelli e inclusioni **(strettamente inclusi).**

specie $\subset$ famiglia $\subset$ classe $\subset$ regno

Esempio

Coniglio (nome scientifico Oryctolagus cuniculus)

Cuniculus $\subset$ Leporidi $\subset$ Mammiferi $\subset$ Animale

Il numero di elementi che compongono un insieme A è detto cardinalità dell'insieme e indicato con $|A|$
Insiemi finiti – Insiemi infiniti

Esempi di insiemi infiniti

L'insieme dei numeri pari $P = \{p \in N : p = 2n\}$

- L'insieme dei numeri primi $P = \{p \in N : p$ è primo$\}$

Un numero $p \neq 1$ si dice primo se è divisibile solo per 1 e per se stesso. Il teorema di fattorizzazione dei numeri naturali assicura che ciascun numero sia scomponibile in modo unico come prodotto di potenze di numeri primi (detti fattori).

Esempi di insiemi finiti. Determinare, per elencazione i seguenti insiemi

L'insieme $A = \{p \in N : p = 2n + 1 \wedge 2n < 10,5 \}$

$A = \{p \in N : p$ è un numero dispari minore di $11 \}$

L'insieme $B = \{b \in \Re$: b è soluzione dell'equazione $x^2 +2x + 1 = 0\}$

Operazioni con gli insiemi
Unione- Intersezione

Unione

- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$

Intersezione

- $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$

Esempio

A = {A, C, G, T} (insieme delle basi azotate DNA)

B = {A, C, G, U} (insieme delle basi azotate RNA)

Allora $A \cup B = \{A, C, G, T, U\}$

Allora $A \cap B = \{A, C, G\}$

Operazioni con gli insiemi
Differenza - Complementare

- Differenza
- $A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$

A = {A, C, G, T} (insieme delle basi azotate DNA)
B = {A, C, G, U} (insieme delle basi azotate RNA)

- $A \setminus B = \{T\}$

- Rispetto ad un dato insieme universo U possiamo definire una ulteriore operazione:

- • Complementare
- $C(A) = \{x \in U : x \notin A\}$
- Per esempio se U = N e A è l'insieme dei numeri pari, allora C(A) è l'insieme dei numeri dispari. (stiamo considerando 0 pari)

Prodotto cartesiano di A e B

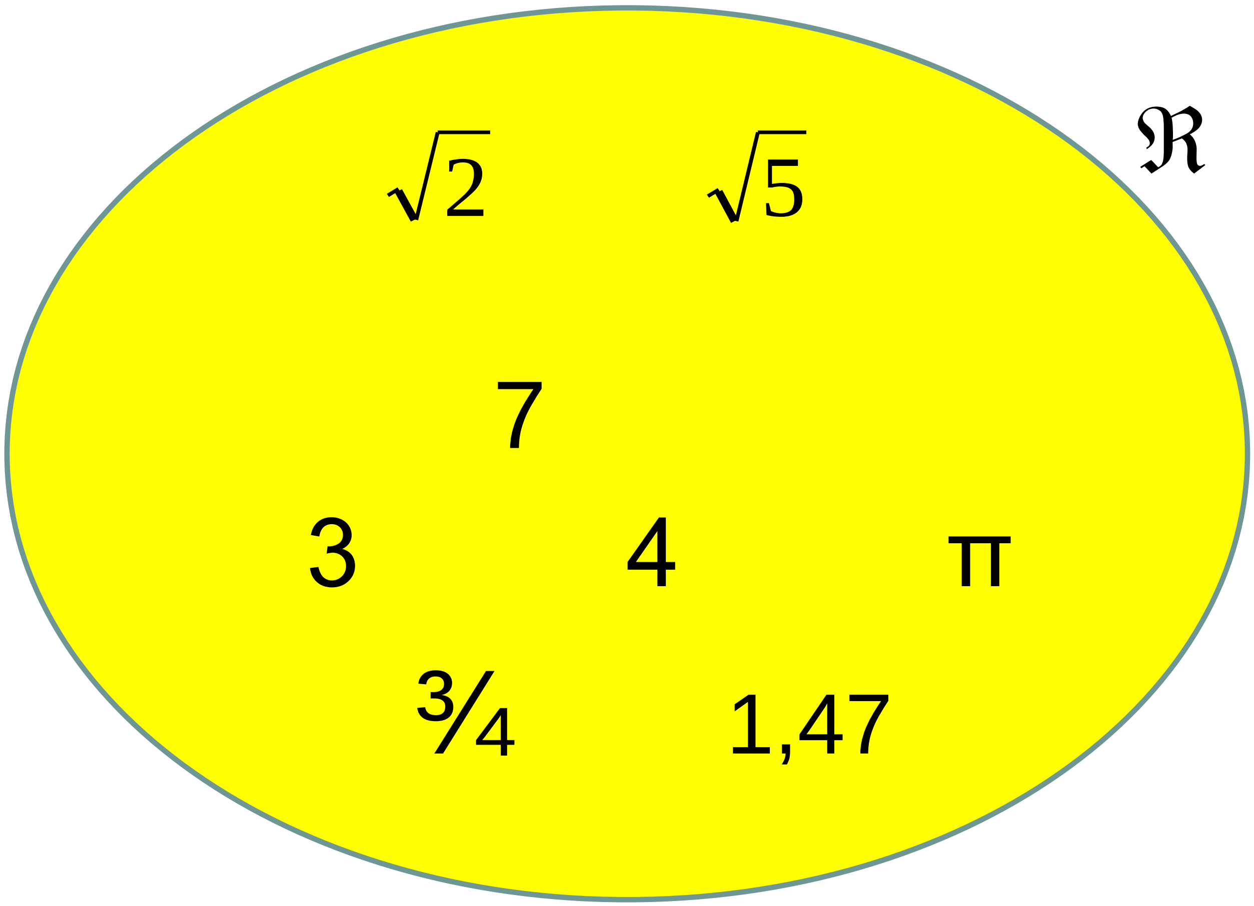
- Dati due insiemi A e B si possono considerare le coppie ordinate (a, b), con $a \in A$ e $b \in B$.
- Una coppia si dice ordinata se il primo elemento appartiene al primo insieme ed il secondo al secondo insieme. Due coppie (a, b) e (a′, b′) sono uguali se a = a′ e b = b′.

- Definizione. Dati due insiemi A e B si dice prodotto cartesiano di A e B e si indica con A x B, l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b).

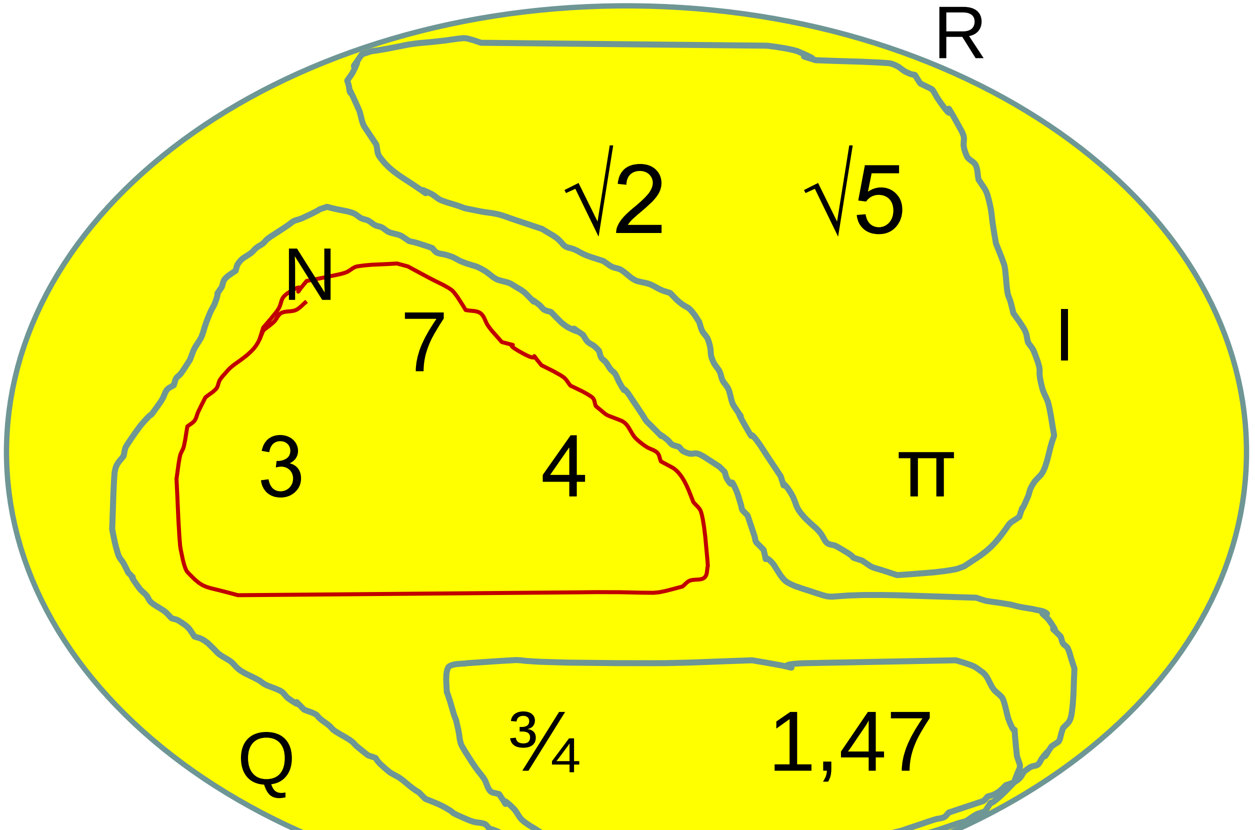
Esempio se A = {0, 1} e B = {a, b, c} il prodotto cartesiano è

- A x B = {(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)}

Individua sottoinsiemi di $\Re$



Definiamo i sottoinsiemi



Insiemi numerici

Notazioni utilizzate per denotare gli insiemi numerici

- N = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$ numeri naturali
- Z = $\{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ numeri interi
- Q = $\{p/q : p, q \in Z, q \neq 0\}$ numeri razionali
- I = numeri irrazionali $\sqrt{2},\ \pi,\ e$
- R numeri reali = $Q \cup I$

Insiemi numerici

L'insieme dei numeri Irrazionali non è vuoto, contiene almeno radice di 2

$$\exists x :: x \neq \frac{p}{q}, \text{con } p \text{ e } q \text{ interi} \qquad \sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$$

Dimostrazione per assurdo (supponiamo che radice di due sia razionale)
Se lo fosse, allora potrebbe essere scritto nella forma p/q con p e q numeri interi primi fra loro ed elevando al quadrato si avrebbe

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \qquad p^2 = 2q^2$$

Da p^2 divisibile per 2 segue che anche p è divisibile per 2 $\quad p = 2k,\ k \in Z$.
Sostituendo si ottiene $4k^2 = 2q^2$ da cui, semplificando, $q^2 = 2k^2$. Ma allora anche q^2 è divisibile per 2 e di conseguenza anche q.

Contro l'ipotesi p e q non sarebbero primi fra loro

Esercizio insiemi numerici e parametri

Dati i due insiemi

- $A_t = \{x : x \in R \wedge (x^2 + t)<0 \}$
- $B = \{x : x \in R \wedge x(x^2 + 1)<0 \}$

Determinare al variare di $t \in R$

- $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$
- Se $\exists$ t tale che $A_t \subset B$

L'insieme dei numeri reali R

Rappresentazioni

- Rappresentazione decimale e forma frazionaria dei numeri razionali

$X = a, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4\, \alpha_5$ *allineamento decimale finito o periodico*

$X = 12,25$ $X = 1225/100 = 245/20 = 49/4$

- Numero periodico e forma frazionaria

$$\frac{1}{3} = 0,\bar{3} = \frac{3}{9} \qquad 2,1\bar{3} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{3}{90} = \frac{192}{90} = \frac{32}{15}$$

- Oppure $2,1\bar{3} = \dfrac{213 - 21}{90} = \dfrac{192}{90} = \dfrac{32}{15}$

Esercizio. Dire se sono vere le uguaglianze: $2,\bar{9} = 3$ $2,5 = \dfrac{5}{2}$ $\dfrac{1}{5} = 1,5$

L'insieme dei numeri reali R

misurare la diagonale di un quadrato di lato 1
risolvere l'equazione $x^2 - 2 = 0$
misurare la lunghezza di una circonferenza…

Forma polinomiale dei numeri reali

2585, 25

$2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 8 \times 10 + 5 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$

- Rappresentazione dei numeri reali

allineamento decimale infinito (numero infinito di cifre dopo la virgola)

$$X = a, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'insieme dei numeri reali R

misurare la diagonale di un quadrato di lato 1
risolvere l'equazione $x^2 - 2 = 0$
misurare la lunghezza di una circonferenza…

- Approssimazione, cifre significative, errore nella approssimazione
- $\pi = 3,141592.......$
- $3,141592 < \pi < 3,141593$

- $\alpha = (12,35 \pm 0,01)m$

indica che la lunghezza espressa in metri è compresa tra 12,34 *m* e 12,36 *m* *0,01 viene detto errore assoluto*

- Notazione scientifica
- Ogni numero positivo può essere scritto come prodotto di un numero compreso fra 1 e 10 per un'opportuna potenza di 10
- $321573 = 3,21573 \times 10^5$ $0,00015 = 1,5 \times 10^{-4}$

Ordinamento di R
Ordinamento totale

- In R è definito un ordinamento totale
- indicato con il simbolo $\leq$
- $\forall$ a, b $\in \Re$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$

- Questo ordinamento verifica le seguenti proprietà
- riflessiva $a \leq a$
- antisimmetrica se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$
- transitiva se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$

Ordinamento di R e operazioni di somma e prodotto:

- se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c$ per ogni $c \in R$
- se $a \leq b$ e $c > 0$ allora $ac \leq bc$
- se $a \leq b$ e $c < 0$ allora $ac \geq bc$

Intervalli della retta reale

- Siano P e Q due punti della retta reale di ascissa a e b rispettivamente,
- con $a < b$.

- Possiamo considerare i seguenti sottoinsiemi di R:
- $[a, b]$ insieme dei numeri reali tali che $a \leq x \leq b$ **Intervallo chiuso**

- $(a, b]$ insieme dei numeri reali tali che $a < x \leq b$ **Intervallo aperto**

- $[a, b)$ insieme dei numeri reali tali che $a \leq x < b$
- (a, b) insieme dei numeri reali tali che $a < x < b$

A ciascuno di essi corrisponde il segmento di estremi P e Q;, nella rappresentazione sulla retta, gli estremi sono compresi o esclusi

Questi intervalli sono limitati, nel senso che la loro misura è finita o esiste un intervallo con estremi in R che li contiene

Intervalli in R

- Esistono anche intervalli illimitati:

- $(-\infty, a]$ insieme dei numeri reali tali che $x \leq a$
- $(-\infty, a)$ insieme dei numeri reali tali che $x < a$
- $[a,+\infty)$ insieme dei numeri reali tali che $x \geq a$
- $(a,+\infty)$ insieme dei numeri reali tali che $x > a$
- $(-\infty,+\infty)$ tutti i numeri reali

Esempi

Dire se sono intervalli aperti o chiusi

$(-\infty, -3.25] \cap [-7, -3.3]$

$$\left[3.55, 4.\bar{9}\right] \cap \left(3.2, 5\right]$$

Completezza di R

- La proprietà di completezza (o di continuità) distingue i numeri reali dai numeri razionali Q

- Si definisce sezione di R una coppia (A, B) di sottoinsiemi non vuoti di R tali che
  - $A \cup B = R$, $A \cap B = \emptyset$
  - se $a \in A$ e $b \in B$ allora $a \leq b$

- **Proprietà di completezza** .

Per ogni sezione (A, B) di R esiste uno ed un solo numero reale ℓ tale che, $\forall\, a \in A$ e $\forall\, b \in B$ vale $a \leq \ell \leq b$.

- Il numero ℓ è detto elemento separatore di A e B.

Completezza di R

- La proprietà di completezza (o di continuità) distingue i numeri reali dai numeri razionali Q

- Si definisce sezione di R una coppia (A, B) di sottoinsiemi non vuoti di R tali che
  - $A \cup B = R$, $A \cap B = \emptyset$
  - se $a \in A$ e $b \in B$ allora $a \le b$

- **Proprietà di completezza** .

Per ogni sezione (A, B) di R esiste uno ed un solo numero reale ℓ tale che, $\forall\, a \in A$ e $\forall\, b \in B$ vale $a \le \ell \le b$.

- Il numero ℓ è detto elemento separatore di A e B.

Operazioni in R . Somma e Prodotto

- Sono definite due operazioni, la somma e il prodotto,
- $a, b \to a + b$
- $a, b \to a\, b$
- Le due operazioni godono delle **proprietà**

commutativa $a + b = b + a$ $\qquad$ $a\, b = b\, a$

associativa $a + (b + c) = (a + b) + c$ $\qquad$ $a\,(b\, c) = (a\, b)c$

distributiva $(a + b)\, c = a\, c + b\, c$

- elemento neutro $a + 0 = a$ $\qquad$ $a\,(1) = a$
- elemento inverso $a + (-a) = 0$ $\qquad$ $a\, 1/a = 1$ se $a \neq 0$

Operazioni in R . Le Potenze

- Possiamo moltiplicare 5 per tre volte con se stesso, cioè formare il prodotto 5 x 5 x 5 e indicarlo con 5^3.
- Per qualsiasi numero reale: se a è un numero reale, la notazione a^3 sta a indicare *a x a x a.*

- In generale scriviamo a^n (*a* alla *n* oppure *a* elevato *n*),
- dove $n \in N$ rappresenta un numero naturale qualsiasi.

Chiamiamo a^n potenza di base *a* ed esponente *n*

Proprietà fondamentali delle potenze

$a^m a^n = a^{m+n}$

$a^m b^m = (ab)^m$ $\qquad$ $a^m/a^n = a^{m-n}$

$a^m/b^m = (a/b)^m$ $\qquad$ $(a^n)^m = a^{nm}$

$a^0 = 1$

Le Potenze con esponente reale

- Cosa significa elevare un numero reale *a* per -1?

- Consideriamo le proprietà delle potenze.
- Se prendiamo $m = 0$ e $n = 1$
- Nell'uguaglianza $a^m/a^n = a^{m-n}$ otteniamo
  - $1/a = a^{-1}$.
- Quindi a^{-1} è il reciproco di *a*.

- Allo stesso modo si ottiene $a^{-n} = 1/a^n$.
- Quando $a = 0$ è possibile eseguire $a^n = 0$ ma non è possibile calcolare a^{-n}.
- Infatti si avrebbe $0^{-n} = 1/0^n = 1/0$.

Le Potenze con esponente reale

- Usando la proprietà $(a^n)^m = a^{nm}$ possiamo definire anche le potenze con esponente razionale.

- Esempio: caso in cui l'esponente vale 1/2
- In questo caso si ha $a^{1/2} = \sqrt{a}$
- Per definizione, la radice quadrata di un numero è un numero il cui quadrato da il numero iniziale. Da cui, usando la proprietà
- $(a^n)^m = a^{nm}$, segue che $(a^{1/2})^2 = a^{(1/2)2} = a^1 = a$.

- **<u>se a < 0,</u> la potenza $a^{1/n}$, con n pari, non ha senso.**
- **Infatti le radici pari dei numeri negativi non sono numeri reali.**

- <u>Se *a* > *0*,</u> la potenza a^x può essere definita per esponenti reali arbitrari *x*.

- **Esempi** $\mathbf{2^x}$ $\mathbf{(\frac{1}{2})^x}$

Le Potenze con esponente reale

- **<u>se a < 0,</u> la potenza $a^{1/n}$, con n pari, non ha senso.**
- **Infatti le radici pari dei numeri negativi non sono numeri reali.**

- <u>Se *a* > *0*,</u> la potenza a^x può essere definita per esponenti reali arbitrari *x*.

- **Esempi** 2^x $(\frac{1}{2})^x$

Dire per quali valori di k sono calcolabili per $\forall x \in \Re$

$$(k^2-2)^x \qquad (k-1)^{-2x}$$

Determinare il valore per $x = 2,\ x = 10,\ x = -3,\ x = -10,\ x = 0$

I logaritmi

- Scegliamo una base $a > 0$ ($a \neq 1$) e consideriamo l'equazione esponenziale $a^x = b$, $b \in R$, $b > 0$

- L'equazione ammette sempre un'unica soluzione.
- Esempio, l'equazione $3^x = 9$
- ha soluzione $x = 2$ (unica)
- L'equazione $16^x = 4$ ha soluzione $x = 1/2$.
  L'equazione $(1/2)^x = 8$ ha soluzione $x = -3$.

- Ma qual è la soluzione dell'equazione $3^x = 8$?
  - x si chiama il logaritmo in base 3 di 8.

I logaritmi

- Definizione

Dati $a > 0$ ($a \neq 1$) e $b > 0$, chiamiamo logaritmo in base a di b il numero (univocamente determinato) x per il quale si ha

- $a^x = b$

E scriviamo $x = log_a b$

Logaritmi: proprietà e casi particolari

- Le proprietà generali sono:
  - $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$
  - $\log_a b - \log_a c = \log_a(b/c)$
  - $\log_a(b^n) = n \log_a b$
  - $\log_a a = 1$
  - $\log_a 1 = 0$

- Esiste un ulteriore formula che permette di scrivere un logaritmo in base *a* in una base diversa *c*:
  - $\mathrm{log}_a\, \mathrm{b} = \mathrm{log}_c\, \mathrm{b} / \mathrm{log}_c\, \mathrm{a}$

Operazioni in R
Il valore assoluto di un numero reale

Valore assoluto del numero reale *x* si indicata con |*x*|.

Esempio il valore assoluto di 2 è 2, il valore assoluto di −3 è 3 e |0| = 0.
Formalmente, al variare di x $\in \Re$, si definisce:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Valore Assoluto e misura

Fissato un punto P sulla retta reale (dotata di sistema di riferimento) di ascissa *x* la misura del segmento OP vale

x se $x > 0$ e vale $-x$ se $x < 0$.

La misura del segmento OP = $|x - 0| = |x|$. Distanza del punto P dall'origine del sistema di riferimento

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano

- Indichiamo il piano dotato di sistema di riferimento con
- $R \times R = R^2$. Assi coordinati *X* e *Y*

- Ad ogni punto P del piano è associata una coppia ordinata di numeri reali (x_P , y_P) e viceversa

- (x_P , y_P) sono le coordinate del punto P
- x_P è detta ascissa mentre y_P ordinata.

- Il punto di intersezione tra l'asse delle ascisse e quello delle ordinate prende il nome di origine ed è denotato con
- O.
- Esempio grafico quesito n. 11 versione F Test 1011

Distanza tra due punti

- Dati due punti sulla retta la distanza è
- $d(P,Q) = |x_Q - x_P|$

- Dati due punti nel piano

$$P = (P_x, P_y) \text{ e } Q = (Q_x, Q_y)$$

la distanza tra P e Q, denotata con *d(P,Q),* è data da

(rappresentiamo e calcoliamo la distanza)

$$d(P,Q) = \sqrt{(Q_x - P_x)^2 + (Q_y - P_y)^2}$$

Determinare la distanza dei punti $P = (-1, 3)$ $Q = \left(\frac{1}{2}, -3\right)$

Sistema di riferimento e rappresentazione (potenza e logaritmo)

Determinare i punti di coordinate (x, y) per i seguenti valori di x : 2, 4, -1/4, -1/2

$$y = 2^x \quad \text{e} \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Determinare i punti di coordinate (x, y) per i seguenti valori di x : 1, 2, 1/4, 1/2

$$y = \log_2 x$$

Risoluzione

Esercizio di sintesi sugli insiemi

Dati i due insiemi

- $A_t = \{x : x \in R \wedge (x^2 + t) < 0\}$
- $B = \{x : x \in R \wedge x(x^2 + 1) < 0\}$

Determinare al variare di $t \in R$

- $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$
- Se $\exists\, t$ tale che $A_t \subset B$

- Se $t \geq 0$?

- Se $t < 0$?

Esercizio di sintesi sugli insiemi

Dati i due insiemi

- $A_t = \{x : x \in R \wedge (x^2 + t) < 0 \}$
- $B = \{x : x \in R \wedge x(x^2 + 1) < 0 \}$

Determinare al variare di $t \in R$

- $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$
- Se $\exists$ t tale che $A_t \subset B$

Risoluzione

- Se $t \geq 0$
- $A_t = \varnothing$
- $B = \{x : x \in R \wedge x < 0 \}$
- $A_t \cup B = B$
- $A_t \cap B = \varnothing$
- $A_t \subset B$ SI

- Se $t < 0$
- $A_t =$ $-\sqrt{|t|} < x < \sqrt{|t|}$
- $A_t \cup B = \left(-\infty, \sqrt{|t|}\right)$
- $A_t \cap B = -\sqrt{|t|} < x < 0$
- $A_t \subset B$ NO

$\varnothing \subseteq A \quad \forall A$