LAUREA IN SCIENZE NATURALI (CLASSE L-32)

LAUREA IN SCIENZE GEOLOGICHE (CLASSE L-34)

Lezioni del I semestre – A.A. 2011/2012
Matematica con elementi di statistica
(I parte) - 5 crediti – 40 ore di lezione frontale

Relazioni – Funzioni e studio di fenomeni

Docente Maria Polo

Dipartimento di Matematica e Informatica,
Via Ospedale 72 - Cagliari

e-mail: mpolo@unica.it tel 070 675 8528

Relazioni tra variabili

Formule e parametri

$C = 2\pi r$ $\qquad$ $A = \pi r^2$

Esempio: Calcolare il valore numerico della formula

$$w = \frac{2{,}75(a-b)r^2}{m-n}$$

sapendo che *a = 0,012; b = 0,009; r = 0,02; m = 8,1; n = 0,35*
(quale notazione conviene?)

Relazioni tra variabili ***xRy***

- Curve — Variabili x, y, z
- Funzioni — variabile dipendente, variabile indipendente

Esaminiamo

Circonferenza – Funzioni lineari - Retta – Funzione valore assoluto -

Funzioni – studio di fenomeni

- Le variabili che intervengono in un fenomeno naturale possono essere qualitative (descrivono caratteristiche) e quantitative (rappresentabili in termini di numeri reali)
- Individuare relazioni tra due variabili che descrivono il fenomeno

Chiamiamo D e D’ gli insiemi dei valori assunti dalle variabili

- Una funzione *f* è una relazione tra gli elementi di due insiemi, D e D’, con la seguente proprietà:

- *f* associa ad **ogni elemento** *v* di D **uno ed un solo** elemento *w* di D’ $w = f(v)$

Funzioni – Dominio - Codominio

f associa ad **ogni elemento** *v* di D **uno ed un solo** elemento *w* di D' $w = f(v)$

D dominio

D' insieme immagine di D mediante f $\subseteq$ *Codominio*

Insieme di definizione $\subseteq$ *D*

- Insieme di definizione e "calcolabilità"

3^x -3^x $(-3)^x$

$$\ln(-x+1) \qquad \frac{\sqrt{\ln(-x-1)}}{x^3}$$

Curve, Funzioni e rappresentazioni

Circonferenza centro l'origine e raggio 1:

$$x^2 + y^2 = 1$$

non è una funzione né rispetto alla variabile x né rispetto ad y

Funzione valore assoluto $f(x) = |x|$

Funzioni lineari $f(x) = ax$ $f(x) = ax + b$

(rappresentazione grafica: retta passante per l'origine – retta in posizione generica)

Retta : $ax + by + c = 0$ oppure $y = mx + q$

Curve, Funzioni e rappresentazioni

Circonferenza centro l'origine e raggio 1:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Circonferenza di centro C (x_0, y_0) e raggio r

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Equazione di secondo grado in due variabili; non tutte le equazioni in due variabili di secondo grado rappresentano circonferenze.

Esempio.

$x^2 - y = 0$ è l'equazione di una parabola

che si può anche scrivere $y = x^2$

Funzioni lineari *f(x) = ax + b*

Rappresentazione grafica: retta passante per l'origine – retta in posizione generica

Equazione Retta (equazione di primo grado nelle variabili x e y):

$ax + by + c = 0$ forma implicita

$y = mx + q$ forma esplicita

m si chiama coefficiente angolare

$m = tg\alpha$ (tangente trigonometrica)

q, termine noto, nell'equazione in forma implicita, rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y

Esempi

$F(x) = 5x$ $f(x) = - 5x + 2$

Rappresentare graficamente e determinare due punti uno appartenente e uno non appartenente alla retta

Equazione della Retta - equazione di primo grado nelle variabili x e y

- Retta passante per un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e coefficiente angolare m

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- Retta passante per due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

Funzioni – Dominio – Codominio
Esercizi

Date le seguenti relazioni tra variabili dire se sono funzioni, determinare l'insieme di definizione, disegnare il grafico se si tratta di funzioni lineari.

$$PV = k \qquad \mathrm{k} \in\ ? \qquad P \in\ ? \qquad V \in\ ?$$

$$s(t) = vt + s_0 \qquad \mathrm{t} \in\ ?$$

$$(-3)^{\mathrm{x}} \quad x \in \Re \qquad -3^{\mathrm{x}} \quad x \in \Re \qquad (-3)^{\mathrm{n}} \quad n \in N$$

$$f(x) = \ln(-x+1) \qquad x \in \Re \qquad g(x) = \frac{\sqrt{\ln(-x-1)}}{x^3}$$

Problema

- La percentuale dei semi, di una data pianta, che germogliano dipende dalla temperatura dell'ambiente. Per una data varietà di pomodoro è stato verificato che alla temperatura di 12°c germoglia il 40% dei semi, mentre alla temperatura di 15°c germoglia il 70% dei semi. Trovare , supponendo che sia espressa da una funzione lineare, la relazione tra la temperatura e la percentuale di semi germogliati.

- (Funzioni lineari $f(x) = ax \quad f(x) = ax + b$)

Problema - risoluzione

La percentuale dei semi, di una data pianta, che germogliano dipende dalla temperatura dell'ambiente.

Sappiamo che il fenomeno da studiare è lineare

- $P(t) = at$ $\qquad\qquad$ $P(t) = at + b$

la relazione tra la temperatura t e la percentuale $P(t)$ di semi germogliati è espressa da una funzione lineare

- DATI - Per una data varietà di pomodoro
- $t = 12°c$ $\qquad\qquad$ $P(t) =$ 40% dei semi
- $t = 15°c$ $\qquad\qquad$ $P(t) =$ 70% dei semi

Problema - risoluzione

Sappiamo che il fenomeno da studiare è lineare

$$P(t) = at + b$$

- DATI - Per una data varietà di pomodoro
- t = 12°c $P(t)$ = 40% dei semi
- t = 15°c $P(t)$ = 70% dei semi

- Determinare i valori di a e b
- Sapendo che A = (12, 40) e B = (15, 70) sono punto del grafico della funzione (retta generica)
- dal punto di vista matematico: determinare l'equazione delle retta passante per A e B

Problema – risoluzione

- Determinare i valori di a e b

$$P(t) = at + b \qquad\qquad y = at + b$$

- Sapendo che A = (12, 40) e B = (15, 70) sono punti del grafico della funzione (retta generica)
- Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 40 = 12a + b \\ 70 = 15a + b \end{cases}$$

a = 10 b = - 80

Problema - risoluzione

- Sapendo che il fenomeno è lineare

$$P(t) = at + b \qquad\qquad y = at + b$$

- Cioè che $\frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = a$ è costante

e che A = (12, 40) e B = (15, 70) sono punti del grafico della funzione

- Si può calcolare direttamente $\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = a = \frac{70 - 40}{15 - 12} = \frac{30}{3} = 10$

Problema - risoluzione

- Sapendo che il fenomeno è lineare

$P(t) = at + b$ e determinato $a = 10$

- Imporre che A (o B) A = (12, 40) B = (15, 70) siano punti del grafico della funzione
- Utilizzando la formula che permette di calcolare l'equazione della retta, noto il coefficiente angolare e un suo punto
- $P - P_1 = a\,(t - t_1)$ $P - 40 = 10\,(t - 12)$ $P = 10t - 80$

Problema - risoluzione

- Sapendo che il fenomeno è lineare

$$P(t) = at + b$$

- Imporre che A = (12, 40) e B = (15, 70) siano punti del grafico della funzione
- Utilizzando la formula che permette di calcolare l'equazione della retta, noti due suoi punti
- $\dfrac{P(t) - 70}{70 - 40} = \dfrac{t - 15}{15 - 12}$ da cui $P(t) = 10t - 80$

Il valore assoluto

Valore assoluto del numero reale *x* si indicata con |*x*|.

Esempio il valore assoluto di 2 è 2, il valore assoluto di −3 è 3 e |0| = 0.

Formalmente, al variare di x $\in \Re$, si definisce:

|x| = *x se x ≥ 0*

−x se x < 0

La funzione Valore Assoluto

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Valore assoluto di una funzione

Esempio

$$\left|x^2+3\right| = \begin{cases} x^2+3 & \text{per} \quad x^2+3 \geq 0 \\ -\left(x^2+3\right) & \text{per} \quad x^2+3 < 0 \end{cases}$$

Rappresentazione grafica di $y = f(x)$

e di $y = |f(x)|$

Esempio $f(x) = x^2 -3x +1$ *funzione quadratica – rappresentazione grafica*

$y = x^2 -3x +1$ *equazione della parabola*

ascissa vertice della parabola $x_v = -b/2a$

Funzione definita a tratti
Funzione costante a tratti

Funzione definita a tratti se la relazione tra le variabili che la definisce assume forme diverse in domini diversi (Rappresentare il grafico)

$$G(T)=\begin{cases} 6T-90 & \text{se} \quad 15 \leq T \leq 30 \\ 90 & \text{se} \quad 30 < T < 35 \\ -18T+720 & \text{se} \quad 35 \leq T \leq 40 \end{cases}$$

Funzione costante a tratti se la relazione tra le variabili che la definisce assume valori costanti diversi in domini diversi
Caso particolare: funzioni a gradino

$$g(z)=\begin{cases} -2 & \text{se} \quad z \leq 0 \\ -1 & \text{se} \quad 0 < z < 3{,}5 \\ 1 & \text{se} \quad z \geq 3{,}5 \end{cases}$$

Funzioni e simmetrie

Funzione pari $f(-x) = f(x)$

il grafico è simmetrico rispetto all'asse y

Esempio $f(x) = x^2$ *parabola con vertice nell'origine*

$f(x) = \cos x$

Funzione dispari $f(-x) = - f(x)$

il grafico è simmetrico rispetto all'origine

Esempi $f(x) = tgx$ $f(x) = senx$

Funzioni e traslazioni

Traslazione di vettore parallelo all'asse *x* (direzione parallela all'asse *x*)

Data la funzione $f(x)$ e noto il suo grafico:

il grafico della la funzione $f(x-x_0)$ si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ di x_0 unità nel verso positivo (verso destra)

il grafico della la funzione $f(x+x_0)$ si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ di x_0 unità verso sinistra.

Esempi

$f(x) = x^2$ $g(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ $h(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

Verificare disegnando il grafico delle tre funzioni quadratiche (parabola)

Ascissa vertice della parabola $x_v = - b/2a$

Funzioni e traslazioni

Traslazione di vettore parallelo all'asse y

Data la funzione *f(x)* e noto il suo grafico:

il grafico della la funzione $f(x)-x_0$ si ottiene traslando il grafico di *f(x)* di x_0 unità in verso negativo (verso il basso)

il grafico della la funzione $f(x)+x_0$ si ottiene traslando il grafico di *f(x)* di x_0 unità in verso positivo (verso l'alto).

Esempi

$f(x) = 5^x$ $g(x) = 5^x - 1$ $h(x) = 5^x + 1$

Verificare disegnando il grafico delle tre funzioni esponenziali

Determinare il dominio D e il segno delle tre funzioni $\forall x \in D$

Funzioni crescenti, decrescenti

Data la funzione $f(x)$ definita nel dominio $D \subseteq \Re$

Definizione.

$f(x)$ si dice crescente nell'intervallo $I = [a, b] \subseteq D$ se

$$\forall\, \mathbf{x_1} \text{ e } \mathbf{x_2} \in \mathbf{I} \qquad x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

Definizione.

$f(x)$ si dice decrescente nell'intervallo $I = [a, b] \subseteq D$ se

$$\forall\, \mathbf{x_1} \text{ e } \mathbf{x_2} \in \mathbf{I} \qquad x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

Esempi

$f(x) = x^2$ $\quad g(x) = 5^x - 1$ $\quad h(x) = tgx$ $\quad w(x) = senx$

Funzioni limitate - massimi e minimi locali e assoluti

Data la funzione *f(x)* definita nel dominio $D \subseteq \Re$:

Definizione.

Si dice che f(x) ha un punto di **massimo locale** in $x_o \in \mathbf{I}$, $I = [a, b] \subseteq D$, se

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I} \qquad f(x_0) \geq f(x)$$

tale valore **max f = $f(x_0)$, $\in$ f(D) insieme immagine o codominio di f**

Definizione.

Si dice che f(x) ha un punto di **minimo locale** in $x_o \in \mathbf{I}$, $I = [a, b] \subseteq D$, se

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I} \qquad f(x_0) \leq f(x)$$

tale valore **min f = $f(x_0)$, $\in$ f(D) insieme immagine o codominio di f**

Esempi

$f(x) = (x + 1)^2$ $\qquad$ $g(x) = 5^x - 1$

Massimi e minimi locali e assoluti
Funzioni limitate

Data la funzione *f(x)* definita nel dominio $D \subseteq \Re$:

Definizione. Massimo e minimo assoluti

Si dice che il valore **max f = $f(x_0)$ è massimo assoluto di** f(x) in tutto il suo Dominio D se

$$\forall x \in D \qquad f(x_0) \geq f(x)$$

Si dice che il valore **min f = $f(x_0)$ è minimo assoluto di** f(x) in tutto il suo Dominio D , se

$$\forall x \in D \qquad f(x_0) \leq f(x)$$

tale valore **min f = $f(x_0)$, $\in$ f(D) insieme immagine o codominio di f**

Esempi

$f(x) = -(x+1)^2 + 2$ massimo assoluto = 2 (valore assunto per x = - 1)

non ha minimo assoluto $\in \Re$

Funzioni limitate
Data la funzione *f(x)* definita nel dominio $D \subseteq \Re$

Definizione. Funzione limitata

Si dice che f(x) è limitata in tutto il suo Dominio D

Se il codominio è un insieme (intervallo) limitato (può essere sia chiuso che aperto), sottoinsieme proprio di $\Re$

Cioè se il massimo e il minimo assoluti sono appartenenti ad $\Re$, oppure

Se l'estremo superiore e inferiore sono appartenenti ad $\Re$, quando il codominio è un intervallo aperto

Esempi

$f(x) = (x + 1)^2$ funzione limitata solo inferiormente

Codominio = $[0, +\infty[$ Min f = 0, sup f = $+\infty$

$g(x) = 5^x - 1$ funzione limitata solo inferiormente

Codominio = $]-1, +\infty[$ inf f = -1, sup f = $+\infty$

Funzioni e studio del grafico

Esempi

$f(x) = -(x+1)^2 + 2$

$g(x) = 5^x - 1$

$h(x) = tgx$ $\qquad w(x) = senx$

Determinare il dominio D, il segno delle funzioni $\forall x \in D$, dire se sono crescenti, decrescenti in D

Dire se il codominio è un intervallo aperto o chiuso, determinare un intervallo in cui f, h, h siano limitate.

Funzioni composte

- Date le due funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ se l'immagine di f è inclusa nell'insieme di definizione di g (il dominio della g coincide con il codominio della f) si può costruire la funzione composta (f composto g)
  - $g \circ f : A \rightarrow C$ nel modo seguente:
    - $x \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x))$.

Quindi $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Esempio

- $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2^x$. La funzione g è definita $\forall x \in \Re$
- Quindi possiamo costruire la funzione composta $g \circ f$
- $$x \xrightarrow{f} 2x + 1 \xrightarrow{g} 2^{2x+1}$$

Funzioni iniettive, suriettive

- Una funzione $f : A \rightarrow B$ **si dice iniettiva** se
  - $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

- o, in modo equivalente, f è iniettiva se
- $f(x_1) = f(x_2)$ implica che $x_1 = x_2$.

Esempio

h(x) = tgx *è iniettiva*

w(x) = senx *non è iniettiva*

- Data una funzione $f : A \rightarrow B$ chiamiamo immagine di f l'insieme di tutti gli elementi di B che sono immagine di qualche elemento di A:

$$\mathrm{Imm}(f) = \{b \in B : \exists\, a \in A \text{ con } f(a) = b\} \subseteq B.$$

- Una funzione $f : A \rightarrow B$ **si dice suriettiva** se $\mathrm{Imm}(f) = B$.

Funzioni biiettive
Funzione inversa

- Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice **biiettiva se è simultaneamente iniettiva e suriettiva.**

Esempio

- Le funzioni biiettive sono invertibili.

Data una funzione biiettiva $f : A \rightarrow B$ **l'inversa di f, denotata con**

$f^{-1} : B \rightarrow A$, è l'unica funzione da B in A tale che se

$$y = f(x) \quad \text{allora} \quad f^{-1}(y) = x.$$

Esempio

$$f(x) = tgx \qquad f^{-1}(x) = arctgx$$

Sono invertibili in un dato intervallo $I = [a,b]$ le funzioni monotone in I (sempre crescenti, o sempre decrescenti nell'intervallo)

L'operazione di limite per funzioni di una variabile

Esempio $f(x) = tgx$ Dominio $x \neq \pm\pi/2 + k\pi$

Consideriamo la restrizione di f all'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$ e studiamo il comportamento di f agli estremi dell'intervallo

Diciamo che per x che tende a $\pm \pi/2$ la funzione f(x) tende a $\pm\infty$ o, in modo equivalente, la funzione ha limite $\pm\infty$, o la funzione è divergente (convergente a $\pm\infty$)

Definizione

f(x) tende a $+\infty$, per x che tende a $\pi/2$ da sinistra, se $\forall k>0$ $\exists\delta(k)$ tale che $f(x) > k$ per $\forall x \in (\pi/2 - \delta(k), \pi/2)$

La retta $x = \pi/2$ è un asintoto verticale per la funzione tgx

Esempio

Verificare che *tgx* tende a $-\infty$ per *x* che tende a $-\pi/2$ da destra

L'operazione di limite per funzioni di una variabile

Esempio $f(x) = 2^x$ Dominio $\Re$

Diciamo che per x che tende a - ∞ f(x) tende a 0 o, in modo equivalente, la funzione ha limite zero, o la funzione è convergente a zero

Definizione

f(x) tende a ℓ, per *x* che tende a - ∞ se $\forall\varepsilon>0$ $\exists\kappa(\varepsilon)>0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{per} \quad \forall x < -\kappa$$

La retta y = 0 è un asintoto orizzontale per la funzione $f(x) = 2^x$

Verificare che $f(x) = (1/2)^x$ tende a zero per *x* che tende a $+\infty$

L'operazione di limite per funzioni di una variabile

Definizione

f(x) tende a ℓ, per *x* che tende a + ∞ se $\forall \varepsilon>0 \ \exists \kappa(\varepsilon)>0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{per} \qquad \forall x > \kappa$$

Cioè risulta $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ per $\forall x > \kappa$

Definizione

f(x) tende a ℓ, per *x* che tende a x_0 se $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta(\varepsilon)>0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{per} \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Cioè risulta $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ per $\forall x,\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

L'operazione di limite - proprietà

Definizione

Date due funzioni, il limite della somma è uguale alla somma dei limiti

Se f(x) tende a ℓ_1, g(x) tende a ℓ_2 per *x* che tende a x_0 allora

$$\lim (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2 \qquad \text{per } x \text{ che tende a } x_0$$

Si ha il caso di forme di indecisione, o indeterminate,
quando a $\ell_1 = \pm\infty$ $\ell_2 = \mp\infty$

Esempi. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-2^x + x\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x + x^2\right) = -\infty + \infty$$

Trasformare in modo da modificare ed eliminare la forma indeterminata

$$\lim_{x\to 2}\left(3x + x^2\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x + x^2\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(\frac{3}{x} + 1\right) = ?$$

Limite del prodotto?

L'operazione di limite - proprietà

Definizione. Date due funzioni, il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti

Se f(x) tende a ℓ_1, g(x) tende a ℓ_2 , per *x* che tende a x_0 , allora

$$\lim(f(x) \times g(x)) = \ell_1 \times \ell_2 \qquad \text{per } x \text{ che tende a } x_0$$

Si ha il caso di forme di indecisione quando a $\ell_1 = \pm\infty$ $\ell_2 = 0$ (o viceversa)

Definizione Date due funzioni, il limite del rapporto è uguale al rapporto dei limiti

Se f(x) tende a ℓ_1, g(x) tende a ℓ_2 , per *x* che tende a x_0 , allora

$$\lim(f(x)/g(x)) = \ell_1 / \ell_2 \qquad \text{per } x \text{ che tende a } x_0$$

Si ha il caso di forme di indecisione quando a $\ell_1 = \pm\infty$ $\ell_2 = \pm\infty$
Oppure quando $\ell_1 = 0$ $\ell_2 = 0$

L’operazione di limite - proprietà

Sia *c* $\in \Re$ **e** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **allora**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(c + f(x)\right) = +\infty$$

$$se \quad c \neq 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} cf(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad c>0 \\ -\infty & \text{se} \quad c<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{c}{f(x)} = 0$$

Le stesse proprietà valgono se sostituiamo a *c* una funzione *g(x)* che converge a *c* per *x* che tende a + ∞

Studiare il comportamento della funzione f(x) = $-2e^{x}$ agli estremi del dominio

L’operazione di limite - Esempi

Esempi. Studiare il grafico della funzione *f(x) = 1/x*
D* = $\Re \setminus \{0\}$ *o* *(-∞, 0) ∪ (0, +∞)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x+x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{3}{x}+1\right)=?$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x+x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{3}{x}+1\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}+1\right)=0+1=1$$

L'operazione di limite - Applicazioni

Esempi. Legge di raffreddamento

$$T(t) = T_E + (T_0 - T_E)e^{-at}$$

T(t) descrive come, al variare del tempo t, si raffredda (o si riscalda) un corpo di temperatura iniziale T_0 Immerso in un ambiente a temperatura fissata T_E , a>0

Calcolare ed interpretare il risultato del limite per $t \to \infty$

Sapendo che a = 1, T_E = 5°C, e T_0 = 20.5°C, il tempo è misurato in ore

Descrivere, disegnando il grafico, l'andamento della funzione e calcolare dopo quanto tempo la temperatura iniziale e quella dell'ambiente differiscono di 1 grado

L'operazione di limite – proprietà Velocità di convergenza, di divergenza

Siano f e g due funzioni divergenti (che convergono ad infinito per x→±∞). Allora per il limite del rapporto possiamo avere i seguenti casi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty \quad \text{si dice che } f \text{ è diverge più rapidamente di } g \text{ (ordine di infinito superiore)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \quad \text{si dice che } f \text{ è diverge meno rapidamente di } g \text{ (ordine di infinito inferiore)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0 \quad \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ divergono con la stessa velocità (stesso ordine di infinito)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \quad \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ divergono asintoticamente ad infinito}$$

L'operazione di limite – proprietà
Velocità di convergenza, di divergenza

Esempi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x + x^2}{3x^2 + x^3} = 0$$

Determinare due polinomi tali che il limite del rapporto sia uguale ad 1

Determinare due polinomi tali che il limite del rapporto sia uguale a $+\infty$

Velocità di convergenza, di divergenza

Confronto tra potenze, esponenziali, logaritmi

se $\beta_2 > \beta_1 > 0$ allora x^{β_2} converge piu rapidamente ad infinito di x^{β_1}

se $f(x) \to \infty$ più rapidamente di $g(x)$ allora

$e^{f(x)} \to \infty$ più rapidamente di $e^{g(x)}$, in particolare

se $c_2 > c_1$ allora, e^{c_2} diverge più rapidamente di e^{c_1}

Verificare se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{2x}}{e^x + e^{3x}} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2} - e^{2x}}{e^x + e^{3x}} = +\infty$$

Velocità di convergenza, di divergenza

Confronto tra potenze, esponenziali, logaritmi

Le funzioni esponenziali di esponente positivo divergono più rapidamente di ogni potenza, cioè

$$\text{se} \quad \beta > 0 \quad \text{e se} \quad c > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{cx}}}{\mathrm{x}^{\beta}} = +\infty$$ o in modo equivalente $$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{x}^{\beta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{cx}}} = 0$$

La funzione logaritmo diverge più lentamente di ogni potenza, cioè

$$\text{se} \quad \beta > 0 \quad \text{e se} \quad a > 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{x}^{\beta}}{\log_a x} = +\infty \quad \text{o} \quad \text{equivalentemente} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{\mathrm{x}^{\beta}} = 0$$

Funzioni Continue, punti di discontinuità

Definizione. Data una funzione di variabile reale in R, e x_0 un punto del dominio (o un estremo del dominio), diciamo che la funzione **f(x) è continua in x_0 se si ha**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \Re \qquad l = f(x_0)$$

Si dice che f è continua in un intervallo se f è continua in tutti i punti di tale intervallo

Se la funzione non ammette limite (non esiste, è infinito, il limite destro è diverso dal limite sinistro) la funzione ha in x_0 un punto di discontinuità

Esempio. Verificare se le seguenti funzioni sono definite e continue in R

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 + \lg x & \text{per } x \geq 1 \\ x^2 & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

Operazione di limite e studio di funzione

Esempi. Studiare insieme di definizione e comportamento agli estremi delle seguenti funzioni.

Osservazione: calcolare i limiti utilizzando le proprietà di infinito e infinitesimo

$$f(x) = \frac{3x + x^4}{2x^2(x^2 + 1)}$$

$$g(x) = \frac{x - 1}{2(x^2 + 1)}$$

Il calcolo del limite in un punto permette di stabilire la proprietà di continuità della funzione in tale punto

Funzioni Continue, punti di discontinuità

Definizione. Data una funzione di variabile reale in R, e x_0 un punto del dominio (o un estremo del dominio), diciamo che la funzione **f(x) ha in x_0 un punto di discontinuità se si ha**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \Re \qquad l \neq f(x_0)$$

Discontinuità eliminabile

$$\lim_{x \to x_{0^+}} f(x) = l_1 \in \Re \qquad \lim_{x \to x_{0^-}} f(x) = l_2 \in \Re \qquad l_1 \neq l_2$$

Discontinuità di prima specie (a salto)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure il limite non esiste}$$

Discontinuità di seconda specie

Dire se la funzione è continua nel suo Dominio
o se presenta punti di discontinuità

$$f(x) = e^{\frac{2}{1-x}}$$

Derivata di una funzione

Data la funzione *f(x)* continua in un punto x_0 si dice che f è derivabile in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Esiste finito il limite del rapporto incrementale (tasso di variazione puntuale o istantaneo se f (t) , t indica la variabile tempo)

Si dice che la funzione *f(x)* è derivabile in un intervallo, o in tutto il suo dominio, se è derivabile in ogni punto dell'intervallo, o di tutto il dominio.

Se una funzione non è continua in un punto allora non è neanche derivabile nel punto

Se una funzione è derivabile in un punto allora è continua nel punto, non è vero il viceversa . Esempio : $f(x) = |x|$

Derivata di una funzione, significato geometrico

Data la funzione *f(x)* continua in un punto x_0 la derivata in x_0 , se esiste, è il numero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione (tangente alla curva) nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$

Nei punti di massimo o minimo locale la derivata prima, se esiste, è nulla.

Esempio. $f(x) = x^2$

Derivata di una potenza. $f(x) = \alpha x^\beta$, con $\alpha, \beta \in \Re$

$$f'(x) = (\alpha x^\beta)' = \frac{d}{dx}(\alpha x^\beta) = \alpha\beta x^{\beta-1}$$

$$f'(x) = (x^2)' = 2x$$

Derivata della somma di funzioni, crescenza e decrescenza della funzione

Date due funzioni *f(x)* e g(x), derivabili in I, allora la derivata della somma è uguale alla somma delle derivate

$$(f + g)' = f' + g' \qquad \forall x \in I$$

Data la funzione *f(x)* derivabile in un intervallo I

Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f(x) è crescente nell'intervallo I

Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I$, allora f(x) è decrescente nell'intervallo I

Esempio. Studiare il grafico $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Derivate delle funzioni elementari

La funzione derivata prima associa ad ogni punto di continuità della funzione f, se esiste, il valore della derivata calcolato nel punto

f'(x) : x $\rightarrow$ f'(x)

Data la funzioni elementari, applicando la definizione si possono determinare le Seguenti funzioni derivate:

$$f'(x) = \left(e^x\right)' = \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{d}{dx}\left(\ln x\right) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \left(a^x\right)' = \frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \ln a$$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$\left(senx\right)' = \frac{d}{dx}\left(senx\right) = \cos x$$

$$\left(\cos x\right)' = \frac{d}{dx}\left(\cos x\right) = -senx$$

Derivate – proprietà e regole di derivazione

Derivata del prodotto di due funzioni

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Esempio: Calcolare la derivata di

$$g(x) = e^{x}\left(x^{3} - 2x + 1\right)$$

Derivata del rapporto di due funzioni

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^{2}(x)}$$

Esempio: Calcolare la derivata di

$$f(x) = \frac{e^{x}}{x}$$

Derivata di una funzione composta

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)$$

Esempio: Calcolare la derivata di

$$f(x) = e^{2x} \qquad g(x) = e^{x^{2}}$$

Derivabilità e continuità di una funzione in un punto

Se una funzione non è continua in un punto allora non è neanche derivabile nel punto.
Esempio. Studiare dominio, comportamento agli estremi Continuità e derivabilità. Tracciare il grafico della funzione $f(x) = -\frac{2}{x+1}$

Se una funzione è derivabile in un punto allora è continua nel punto, non è vero il viceversa .
Esempio : *f(x)* = | *x* | è continua in tutto il suo dominio $\Re$. *f(x)* = | *x* | non è derivabile in *x = 0*

$$\lim_{x \to 0^+} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Derivata e calcolo dei limiti

Considerate due funzioni derivabili, f(x) e g(x) tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Se esiste il limite del rapporto delle derivate, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio. Calcolare il limite applicando la regola (di De L'Hospital)

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Derivata e calcolo dei limiti

Considerate due funzioni derivabili, f(x) e g(x) tali che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

Se esiste il limite del rapporto delle derivate, allora $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Lo stesso risultato vale se f e g divergono per $x\to x_0$

E anche nel caso di f e g entrambe divergenti o entrambe infinitesimo per $x \to\infty$

Esempio. Calcolare il limite applicando la regola (di de L'Hospital)

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0$$

Nell'ultimo caso si ha
una verifica dell'ordine
di infinito delle due funzioni

Derivate successive
Concavità - Punti di flesso

Se la funzione derivata prima di una funzione f è derivabile in un intervallo
La sua derivata si chiama derivata seconda di f e si indica con f'' (x)
Nelle stesse condizioni si può derivare la derivata seconda,
ottenendo la derivata terza di f

Data una funzione derivabile in un intervallo : f(x) ha la concavità verso l'alto negli intervalli del dominio in cui si ha f''(x) > 0
Verso l'alto negli intervalli in cui f''(x) < 0
I punti del grafico della funzione in cui cambia la concavità cambia si chiamano punti di flesso.
Esempio: studiare il grafico di

$$f(x) = x^3$$

Nei punti di flesso la derivata seconda è nulla, a derivata prima può essere maggiore, minore o uguale a zero (flesso a tangente orizzontale)

Derivata e problemi di massimo o minimo

Problema di ottimizzazione.

Data una lattina di forma cilindrica di altezza h, raggio di base r costituita di lamiera di alluminio di spessore fissato in modo che la quantità totale sia proporzionale alla superficie totale. Che proporzioni deve avere in modo che a parità di volume la quantità di alluminio utilizzata sia minima?

Dati $V = \pi r^2 h$ $S_{tot} = 2 \pi r h + 2 \pi r^2$ da cui

$h = V/ (\pi r^2)$ $S = 2 \pi r V/ (\pi r2) + 2 \pi r^2$

Derivando S rispetto a r variabile, si ha il val minimo per S in corrispondenza di $r = (V/ 2 \pi)^{1/3}$ che da in corrispondenza il valore di h=2r (altezza uguale al diametro di base)

Studio di funzione – problemi di massimo o minimo

Per studiare una funzione e determinarne il grafico, determinare:
Dominio e comportamento agli estremi
Derivata prima e punti di massimo, minimo locale
Flessi
Segno e zeri della funzione (anche come controllo sui dati raccolti e per verificare la coerenza degli elementi del grafico già determinati.

Studiare e determinare il grafico delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$N(t) = \frac{3000}{1+e^{-2t}}$$

Legge logistica, descrive
la legge di crescita
in laboratorio
di una popolazione data
T = tempo misurato in giorni
N(t) = numerosità al variare del tempo

Lezioni ed esercitazioni – Gennaio 2012

Lezioni

Martedì 10. 01.2012

Venerdì 13.01.2012

Martedì 17 - Consegna e discussione degli elaborati del preesame del 9.12.11

- Esercitazioni

Lunedì 9.01.2012

Lunedì 16.01.2012

Lunedì 23.01.2012

Lunedì 30.01.2012

Lunedì 06.02.2012

Lunedì 13.02.2012

Il calendario definitivo (date , orario e aula) delle esercitazioni verrà comunicato il 10. 01.2012