LAUREA IN SCIENZE NATURALI (CLASSE L-32)

LAUREA IN SCIENZE GEOLOGICHE (CLASSE L-34)

Lezioni del II semestre – A.A. 2011/2012
Matematica con elementi di statistica

(II parte) - 4 crediti – 32 ore di lezione frontale

I lezione 06.03.2012

Docente Maria Polo

Dipartimento di Matematica e Informatica,
Via Ospedale 72 - Cagliari

e-mail: mpolo@unica.it tel 070 675 8528

Orario settimanale Lezioni

LAUREA IN SCIENZE NATURALI E SCIENZE GEOLOGICHE 1° ANNO - II semestre					
	Lunedì	**Martedì**	**Mercoledì**	**Giovedì**	**Venerdì**
9-10		Matematica con elementi di statistica (II parte)*			
10-11		Matematica con elementi di statistica (II parte)*			
11-12				Matematica con elementi di statistica (II parte)*	
12-13				Matematica con elementi di statistica (II parte)*	
13-14					
14.30-16.30					
15.30-16.30					
16.30-17.30		Matematica con elementi di statistica Esercitazioni			
17.30-18.00		Matematica con elementi di statistica Esercitazioni			

32 ore
dal 6 Marzo
al 30 maggio

Esercitazioni tenute dal Tutor (24 ore)
ulteriori ore di esercitazioni saranno gestite dal docente sulla base delle esigenze

Inizio previsto esercitazioni martedì 27 marzo

Propedeuticità
Matematica con elementi di statistica è propedeutica a tutti gli insegnamenti del 3° anno

- **Obiettivi dell'insegnamento**
  Acquisire le capacità per saper affrontare un problema scientifico utilizzando strumenti e modelli matematici e statistici.

- **Conoscenze (sapere)**

Successioni e serie (cenni).

Calcolo Integrale di funzioni in una variabile.

Elementi di calcolo delle probabilità e statistica

(elementi di base per alcune applicazioni nelle scienze naturali).

Matematica con elementi di statistica (I parte)

- **Abilità/Capacità (saper fare)**
- Risolvere problemi di aritmetica e geometria elementare. Saper operare in ambito algebrico e con gli strumenti elementari del calcolo vettoriale e della geometria analitica. Determinare e descrivere l'andamento di successioni e di semplici serie numeriche; determinare e descrivere il grafico di funzioni di una variabile. Saper calcolare derivata e integrale delle funzioni elementari di una variabile reale. Saper affrontare un problema scientifico utilizzando gli strumenti matematici e statistici
- **Comportamenti (saper essere)**
- Essere in grado di individuare gli strumenti matematici atti alla descrizione di fenomeni naturali elementari. Essere in grado di comprendere e risolvere problemi applicativi delle scienze naturali, attraverso l'utilizzo consapevole e autonomo delle conoscenze acquisite.

Testi di riferimento

- 1. **D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, Matematica per le scienze della vita, Ambrosiana, 2008**
- 2. S. Montaldo, A. Ratto, **Matematica: 2^3 capitoli per tutti**
  Liguori, 2011
- 3. Pagani, Salsa, Matematica per i Diplomi universitari, Masson, 1997
- **4. Invernizzi, Matematica nelle Scienze Naturali, Libreria Goliardica Editrice, 1996**

I testi sono consultabili presso l'aula 16 e la biblioteca del Dipartimento di Matematica e Informatica

Modalità d’esame

Prove scritte in itinere (due per il Modulo I (dicembre – febbraio) e una per il Modulo II - a fine corso). Gli studenti che avranno superato nel complesso le prove in itinere sono ammessi alla prova orale. La prova orale può essere di due forme:

- Prova di conferma. In questo caso lo studente viene interrogato sugli esiti del suo elaborato e avere confermato il voto dello scritto.
- - Colloquio integrativo. In questo caso lo studente viene interrogato sugli esiti del suo elaborato e su tutti gli altri argomenti del programma. Il colloquio è finalizzato al miglioramento della votazione finale rispetto a quella dello scritto.

- Se la prova orale non è sufficiente lo studente dovrà ripetere la stessa. Se lo studente fallisce per due volte la prova orale dovrà ripetere la prova scritta.
- Gli studenti che non superano le prove in itinere potranno sostenere una delle prove scritte generali pubblicate nel sito del corso.

Possono sostenere le prove in itinere anche gli studenti non matricole

Successioni e Serie.

- Successioni
- Progressioni
- Limite di successioni
- Serie convergenti – serie divergenti
- Serie geometrica, serie esponenziale
- Successioni e Leggi di ricorrenza
- Esempi nelle applicazioni

D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, Matematica per le scienze della vita, Ambrosiana, 2008

Parte teorica ed esercizi Cap. 7 da pag. 278 a pag.295

Successioni e Progressioni
Definizioni e esempi

Una successione di numeri reali è interpretabile come una funzione di Dominio = *N che ha come immagine un sottoinsieme di R*

$$s_1 , s_2 , s_3 , \ldots . s_{n-1} , s_n , s_{n+1} , \ldots ..$$

$$S(n) = \frac{1}{2n} \qquad \text{con n da } 1 \text{ a } \infty, \text{ ha come termini } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots ., \frac{1}{2n}, \ldots \ldots$$

Progressione: la somma di un numero finito di termini di una successione. Esempio.
La somma dei primi n numeri naturali

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots . + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Esercizio. Calcolare la somma dei numeri naturali da 1 a 9

$$\sum_{k=1}^{9} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = ?$$

$$\sum_{k=1}^{9} k = \frac{9(10)}{2} = 45$$

Successioni e Comportamento asintotico.

Per le successioni interpretate come funzioni di Dominio = *N*, si può determinate il comportamento asintotico per $n \to \infty$ $\pm\infty$?

Valgono tutte le proprietà dell'operazione di limite viste nel caso generale delle funzioni di variabile reale. (eccetto quelli che necessitano della continuità della funzione come ipotesi)

Esempi. Scrivere per esteso alcuni termini delle seguenti successioni e studiare il comportamento asintotico

$$S(n) = \frac{1}{2n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

$$S(n) = n \qquad \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

$$S(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Successioni e Comportamento asintotico.

Per le successioni interpretate come funzioni di Dominio = *N*, si può determinate il comportamento asintotico per $n \to \infty$ $\pm\infty$?

Esempi. Scrivere per esteso alcuni termini delle seguenti successioni e studiare il comportamento asintotico

$$S(n) = \begin{cases} n & \text{per } n \text{ pari} \\ \dfrac{1}{n} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} S(n) = \begin{cases} \infty & \text{per } n \text{ pari} \\ 0 & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Il limite non esiste

$$S(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{n}} & \text{per } n \text{ pari} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} S(n) = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ 0 & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Il limite vale 0

Successioni e Serie.

Progressione: la somma di un numero finito di termini di una successione .Esempio.
La somma dei primi n numeri naturali

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+.....+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione dell'uguaglianza.
Scrivendo per esteso i termini da *1* a *n* e da *n* a *1* e sommando si ottiene

$$1+ \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \quad 4+5+6+7+8+9+......+(n-1)+n$$

$$n+(n-1)+(n-2)+...+ \quad 2 \quad + \ 1$$

$$\text{La somma ennesima,o ridotta ennesima} = S_n \ \frac{n(n+1)}{2}$$

Determinando il limite della successione S_n per $n \to +\infty$ si determina l'esistenza della somma infinita

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$$

La somma non è finita. Si dice che la serie diverge

Serie. Definizione di somma finita
Serie convergenti – serie divergenti

Data la successione di termine generico $s_n = s_1, s_2, s_3,\ldots..s_n,\ldots..$Consideriamo la successione delle somme parziali

$S_1 = s_1, \quad S_2 = s_1 + s_2, \quad S_3 = s_1 + s_2 + s_3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots.. s_n$

Che prende il nome di serie. Se, per $n \to +\infty$ il limite della successione delle somme parziali esiste finito cioè appartiene ad R si dice che la serie converge e ha somma finita

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha \in \Re \quad \text{cioè}\; \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} s_n$$

Esempio. Consideriamo la serie geometrica di ragione q
Per $|q| < 1$ la serie è convergente e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

La somma è finita.
Perché si ha per $|q| < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$$

Serie. Serie geometrica
Esempio

Uno dei paradossi di Zenone (fine del 400 a.C.)
La freccia non colpirà mai il bersaglio. Se t è il tempo impiegato per percorrere metà del percorso dall'arco al bersaglio, il tempo t/2 sarà quello impiegato per percorrere la prima metà della seconda metà del percorso, e così via …..(supponendo la velocità costante)
Per percorrere tutti i tratti infiniti mancanti …..occorrerà un tempo infinito …..

Il tempo T impiegato per percorrere l'intero percorso sarà T = t + t/2 + t/4 + t/8+….
Si tratta della serie geometrica di ragione ½ che ha somma finita
Verificare e calcolare il tempo T

$$t\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = t\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$T = t\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{2}^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2t$$

Per percorrere l'intero percorso la freccia impiega il doppio del tempo impiegato per percorrere la prima metà dello stesso percorso

Serie.
Serie esponenziale

Si chiama serie esponenziale la serie di potenze definita dalla seguente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

n! si legge n fattoriale e vale $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ..... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad \text{con } 0! = 1$

Per x = 1, la serie permette di calcolare il valore del numero *e* le somme parziali ne danno una approssimazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...\frac{1}{n!} + ... = e$$

Esercizio. Calcolare il valore dalla somma della serie di $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ per $x = 2, \qquad x = -2, \qquad x = \sqrt{2}$

Calcolare il valore approssimato di *e* che si ottiene per n = 4

Successioni e Leggi di ricorrenza

Una successione si dice definita per ricorrenza se il termine ennesimo è definito sulla base di uno o più termini che lo precedono

$$s_n = s_{n-2} \pm s_{n-1}$$

Esempio. La successione di Fibonacci. Determinare i primi 8 termini sapendo che la successione è definita dalla relazione

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{con } F_0 = 1$$

$F_0 = 1$

$F_1 = 2$

$F_2 = 3$

$F_3 = 5$

$F_4 = 8$

$F_5 = 13$

$F_6 = 21$

Una coppia di conigli adulti genera ogni mese una coppia di conigli. Gli animali diventano adulti in un mese e sono in grado di riprodursi. (trascurando la mortalità). La relazione permette di determinare quanti conigli si avranno dopo un numero fissato di mesi

Esercizio. Calcolare quanti conigli si avranno dopo 3 anni sapendo che si è avuta una mortalità dello 0,1 % del totale dei nati.

Successioni e Leggi di ricorrenza

Data una funzione y = f(x) definiamo **sistema dinamico discreto (s.d.d.)** la relazione di ricorrenza, definita per $k \in \mathbb{N}$, con x_0 dato iniziale assegnato

$$x_k = f(x_{k-1})$$

Nel caso generale si ottiene la successione che si chiama **soluzione del sistema dinamico**

$$x_0, \quad x_1 = f(x_0), \; x_2 = f(x_1), \ldots\ldots$$

Esempio. Data la funzione che definisce la crescita malthusiana, costruire i primi quattro termini della successione

$$N_t = R^t N_0$$

$$N_0$$

$$N_1 = f(N_0) = RN_0$$

$$N_2 = f(N_1) = RRN_0 = R^2 N_0$$

Molti fenomeni naturali vengono modellizzati utilizzando sistemi dinamici discreti, lineari omogenei o non omogenei.

Calcolo integrale

- Primitiva di una funzione di variabile reale
- Integrale di Riemann e proprietà elementari
- Regole di integrazione (integrazione per parti e per sostituzione)

- Esempi nelle applicazioni

Primitiva di una funzione di variabile reale

Definizione

Data una funzione $f(x)$, la funzione $F(x)$ è detta primitiva di $f(x)$ se in tutti i punti del suo dominio è soddisfatta l'uguaglianza

$$F'(x) = f(x)$$

Se $F(x)$ è primitiva di $f(x)$, anche $F(x) + c$, $\forall$ c $\in \Re$, è primitiva di $f(x)$

Dimostrazione

Si ha infatti $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$

Primitiva di una funzione di variabile reale

Esempi

La primitiva di $f(x) = x^4$ è $F(x) = \frac{x^5}{5} + c$

Infatti essendo $f'(x) = (\alpha x^{\beta})' = \frac{d}{dx}(\alpha x^{\beta}) = \alpha\beta x^{\beta-1}$

Si ha $F'(x) = \left(\frac{x^5}{5} + c\right)' = 5\frac{1}{5}(x)^{5-1} + 0 = x^4$

In generale la primitiva di $f(x) = x^{\alpha}$ è $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

Verificare. Calcolare la primitiva di $f(x) = 4x^8$

Integrale definito di una funzione di variabile reale e calcolo dell’area di una regione piana

Sia *f(x)* una funzione positiva e continua definita nell’intervallo *[a,b]*

L’area della regione piana compresa tra il grafico della funzione, l’asse *x*, e le rette $x=a$ e $x=b$ si ottiene come

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n^- = \lim_{n\to\infty} A_n^+ = A$$

Dove A_n è una somma di Cauchy, A_n^- e A_n^+ sono le somme di Riemann

Definizione.

Il valore A si chiama integrale definito della funzione *f(x)* nell’intervallo *[a,b] e si indica con*

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

a e b sono detti estremo inferiore e superiore di integrazione, f è detta funzione integranda

Integrale definito di una funzione di variabile reale e calcolo dell'area di una regione piana

Esempio

Consideriamo la funzione *f(x) = x , definita e continua su* $\Re$

Calcoliamo la primitiva e la regione di piano delimitata dal grafico della curva e dalle rette x=0 e x= 1

$$F(x)=\frac{x^2}{2}$$

Calcoliamo l'area del triangolo di vertici (0,0) (1.0) e (1,1)

$$A=\int_a^b xdx=\frac{1}{2}$$ che si ottiene calcolando $$A=\int_a^b xdx=\frac{1}{2}=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-0$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Data *f(x)* una funzione, definita, e <u>continua nell'intervallo *[a,b]* </u>,
la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(z)dz$$

È primitiva di *f* nel punto *x* e si ha $F'(x) = f(x)$

Se *F(x)* è una primitiva di *f(x),* definita nell'intervallo [a,b], allora

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$$

Integrale definito, primitiva e integrale indefinito di una funzione di variabile reale

Data una funzione *f(x) definita e continua su* $\Re$*, l'insieme delle primitive indicata con*

$$F(x) + c = \int f(x)dx$$

Prende il nome di integrale indefinito della funzione

Esercizio.
Date le funzioni considerate nell'intervallo assegnato
Calcolare la primitiva, l'integrale indefinito, l'integrale definito e determinare l'area della regione chiusa individuata dal grafico e dalle rette parallele all'asse y passanti per gli estremi dell'intervallo.

$$f(x) = e^x \text{ nell'intervallo } \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$$

$$g(x) = x^3 \text{ nell'intervallo } \left[1, \sqrt{2}\right]$$

Primitiva di una funzione di variabile reale

Esempi

Ricordando che

$$f'(x) = \left(e^x\right)' = \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$(senx)' = \frac{d}{dx}(senx) = \cos x$$

Calcolare la primitiva di

$$f_1(x) = e^x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = \cos x$$

$$F_1(x) = e^x + c$$

$$F_2(x) = \ln x + c$$

$$F_3(x) = senx + c$$

Verificare il risultato ottenuto

Integrale definito, primitiva e integrale indefinito di una funzione di variabile reale

Data una funzione *f(x) definita e continua su* $\Re$, *l'insieme delle primitive indicata con*

$$F(x)+c=\int f(x)dx$$

Prende il nome di integrale indefinito della funzione

Dimostrazione del teorema fondamentale

Proprietà dell'integrale e regole di calcolo dell'integrale definito e indefinito

Teorema fondamentale del calcolo integrale
Dimostrazione

Data *f(x)* una funzione, definita e continua nell'intervallo *[a,b]*, la funzione $F(x)=\int_a^x f(z)dz$

È primitiva di *f* nel punto *x* e si ha $F'(x)=f(x)$

Per dimostrare il teorema consideriamo le due seguenti proprietà dell'integrale

Data *f(x),* definita e continua nell'intervallo *[a,b]*

1. *Se c* $\in$ *(a, b), si ha* $\int_a^b f(z)dz=\int_a^c f(z)dz+\int_c^b f(z)dz$
2. *Se M e m sono rispettivamente il massimo e il minimo di f(x)* nell'intervallo *[a,b], allora*

$$m(b-a)\leq\int_a^c f(z)dz\leq M(b-a)$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale
Dimostrazione

Data *f(x)* una funzione, definita e continua nell'intervallo *[a,b]* , la funzione $F(x)=\int_a^x f(z)dz$

È primitiva di *f* nel punto *x* e si ha $F'(x)=f(x)$

Per dimostrare il teorema dobbiamo mostrare che vale l'uguaglianza $F'(x)=f(x)$

Dobbiamo quindi costruire il rapporto incrementale per la *F(x)* e calcolare il lim

Consideriamo un incremento h e scriviamo *F(x+h) utilizzando la proprietà 1*

$$F(x+h)=\int_a^{x+h} f(z)dz=\int_a^x f(z)dz+\int_x^{x+h} f(z)dz$$

Il rapporto incrementale è $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$

Teorema fondamentale del calcolo integrale Dimostrazione

Data *f(x)* una funzione, definita e continua nell'intervallo *[a,b]* , la funzione $F(x)=\int_a^x f(z)dz$

È primitiva di *f* nel punto *x* e si ha $F'(x)=f(x)$

Mostriamo ora che il limite per *h→0* del rapporto incrementale è *f(x)*

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(z)dz}{h}=f(x)$$

Utilizzando la proprietà 2 , nell'intervallo [x, x+h] di ampiezza h, si ha infatti

$$h\cdot\min_{x\in[x,x+h]} f(z)\le\int_x^{x+h} f(z)dz\le h\cdot\max_{x\in[x,x+h]} f(z)$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale
Dimostrazione

Data *f(x)* una funzione, definita e continua nell'intervallo *[a,b]*, la funzione $F(x)=\int_a^x f(z)dz$

È primitiva di *f* nel punto *x* e si ha $F'(x)=f(x)$

Dividendo per h>0, e calcolando il limite per h→0, poiché il massimo e il minimo di f(x) nell'intervallo [x, x + h] tendono a f(x) per h→0, si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\min_{x\in[x,x+h]} f(z)\right)\le\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(z)dz}{h}\le\lim_{h\to 0}\left(\max_{x\in[x,x+h]} f(z)\right)=f(x)$$

Abbiamo ottenuto, come volevamo dimostrare $F'(x)=f(x)$

Teorema fondamentale del calcolo integrale
Importante conseguenza

Definiamo il differenziale di f(x), indicato con df (variazione infinitesima di f)

Se la funzione f(x) , ha derivata f'(x) nel punto x, si ha

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}f(x) = f^{'}(x)dx$$

Cioè la variazione infinitesima *df* è proporzionale all'incremento infinitesimo *dx*
Il coefficiente di proporzionalità è la derivata prima nel punto *x*

Se F*(x) è* una funzione, derivabile nell'intervallo *[a,b] . Il teorema fondamentale del calcolo differenziale afferma che vale l'uguaglianza*

$$\int_a^b F^{'}(x)dx = \int_a^b \mathrm{d}F(x) = F(b) - F(a)$$

Calcolo integrale. Regole e metodi di integrazione

Per le seguenti funzioni continue, valgono le formule, dove c è una costante arbitraria

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{per} \quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + \mathrm{c}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + \mathrm{c}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c$$

Calcolo integrale. Regole e metodi di integrazione

Date due funzioni continue e c è una costante arbitraria, si ha

$$\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

Le stesse proprietà valgono per gli integrali definiti, in particolare si ha

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Media di una funzione: data *f* continua in un intervallo [a,b] si definisce media della funzione il numero

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Calcolo integrale. Integrale definito e calcolo di area Esempi.

Calcolare l'area della regione compresa tra l'asse delle *x*, il grafico di *sinx*, e le rette di equazione $x = -\pi$ e $x = \pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$$

L'integrale definito è zero. Funzione dispari.
Gli estremi di integrazione sono opposti.
Quanto vale l'area della regione?

$$Area = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \int_{-\pi}^{0} -\sin x dx + \int_{0}^{\pi} \sin x dx = -(-\cos x)\Big|_{-\pi}^{0} + (-\cos x)\Big|_{0}^{\pi} = 4$$

Calcolare l'area della regione, del semipiano x>0, delimitata dai grafici delle due funzioni

$$f(x) = 5 - 2x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$A = \frac{16}{3}$$

Calcolo integrale. Regole e metodi di integrazione

Dal teorema fondamentale e dalla regola di derivazione del prodotto si ha la seguente **Formula di integrazione per parti.**

Sia *F(x)* una primitiva di *f(x)*   e *G(x)* una primitiva di *g(x)*

$$\int f(x) \cdot G(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot g(x) dx \qquad G'(x) = g(x)$$

Esempio

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot (\ln x) dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = (x \ln x - x) + c$$

Calcolo integrale. Regole e metodi di integrazione

Metodo di integrazione per sostituzione

Il metodo di applica se non è immediato calcolare l'integrale di f(x) e se si può trovare una variabile ausiliaria z legata ad x dalla relazione x = g(z)

Si calcola il differenziale d*x* e si sostituisce nell'integrale la nuova variabile z e il d*x* espresso in termini della nuova variabile z

Se l'integrale ottenuto è più elementare si calcola $\int f(g(z)) \cdot g'(z) dz$

Calcolata la primitiva otteniamo una funzione di z, che dobbiamo ricondurre alla variabile x

Esempio. Calcolare l'integrale indefinito della funzione $f(x) = \cos(5x-1)$

se poniamo $z = (5x-1)$ la funzione da integrare diventa $\cos z$

Calcolo integrale. Regole e metodi di integrazione

Si calcola il differenziale d*x* e si sostituisce nell'integrale la nuova variabile z e il *dx* espresso in termini della nuova variabile z

Se l'integrale ottenuto è più elementare si calcola $\int f(g(z)) \cdot g'(z) dz$

Calcolata la primitiva otteniamo una funzione di z, che dobbiamo ricondurre alla variabile x

Esempio

$$z = (5x - 1) \quad \text{da cui } x = \; g(z) = \frac{z+1}{5} \quad \text{ci serve } \mathrm{d}x = g'(z)dz = \frac{1}{5}\, dz$$

$$\int f(g(z)) \cdot g'(z) dz \; = \int \cos z \cdot \frac{1}{5}\, dz = \frac{1}{5} \int \cos z dz = \frac{1}{5} \sin z + c$$

$$\int \cos z dz = \frac{1}{5} \sin z + c = \frac{1}{5} \sin(5x - 1) + c$$

Calcolo integrale. Regole e metodi di integrazione

Il metodo di integrazione per sostituzione consente di determinare l'integrale di semplici funzioni composte delle funzioni elementari

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{per} \quad n \neq -1$$

$$\int \left(f(x)\right)^n f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{per} \quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \left(f(x)\right)^{-1} f'(x) dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

Esempi

$$\int \left(3x^2 - x + 2\right)^2 (6x-1) dx =$$

$$\int \left(3x^2 - x + 2\right)^2 (6x-1) dx = \frac{\left(3x^2 - x + 2\right)^3}{3} + c$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-(\sin x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c$$

Calcolo integrale.

Non saranno presi in considerazione:

- Integrali impropri
- Integrali definiti e indefiniti di funzioni di 2 o più variabili
- Integrale curvilineo
- Funzioni periodiche e sviluppi in serie
- Equazioni differenziali

D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, Matematica per le scienze della vita, Ambrosiana, 2008
Parte teorica Cap. 9 fino a pag. 373 – esercizi da 9.1 a 9.18