LAUREA IN SCIENZE NATURALI (CLASSE L-32)
LAUREA IN SCIENZE GEOLOGICHE (CLASSE L-34)

Lezioni del I semestre – A.A. 2013/2014

Matematica con elementi di statistica
Matematica e statistica

(I parte) - 5 crediti – 40 ore di lezione frontale
(II parte) – 4 crediti – 32 ore di lezione frontale - II semestre

Docente Maria Polo

Dipartimento di Matematica e Informatica,
Via Ospedale 72 - Cagliari

e-mail: mpolo@unica.it tel 070 675 8528
Cell. 3280092209

Orario di ricevimento: mercoledì ore 11 -13 e ore 15-16

1° anno - I semestre					
	Lunedì	**Martedì**	**Mercoledì Dip. Sc. Terra**	**Giovedì**	**Venerdì Monserrato**
9:00-10:00			Matematica e statistica (Aula Magna)		Matematica e statistica (Aula C)
10:00-11:00					
11:00-12:00					
12:00-13:00					
14:30-15:30	Esercitazioni MATEMATICA (Aula C)				
15:30-16:30	Esercitazioni MATEMATICA (Aula C)				
16:30-17:30					
17:30-18:30					

Orario settimanale Lezioni

Esercitazioni tenute dal Tutor

ore e data di inizio da definire

Recupero del Debito: al superamento del test previsto tra fine ottobre e dicembre o con il superamento del I modulo di Matematica

Propedeuticità
Matematica con elementi di statistica è propedeutica a tutti gli insegnamenti del 3° anno

- **Obiettivi dell'insegnamento**
  Acquisire le capacità per saper affrontare un problema scientifico utilizzando strumenti e modelli matematici e statistici.

- **Conoscenze (sapere)**

Teoria degli insiemi. Numeri reali**.** Vettori e geometria analitica. Successioni e Progressioni. Funzioni in una variabile. Calcolo differenziale.

Integrale di funzioni in una variabile**.**

Matematica con elementi di statistica (I parte)

- **Abilità/Capacità (saper fare)**
- Risolvere problemi di aritmetica e geometria elementare. Saper operare in ambito algebrico e con gli strumenti elementari del calcolo vettoriale e della geometria analitica. Determinare e descrivere l'andamento di successioni; determinare e descrivere il grafico di funzioni di una variabile. Saper calcolare derivata e integrale delle funzioni elementari di una variabile reale. Saper affrontare un problema scientifico utilizzando gli strumenti matematici e statistici
- **Comportamenti (saper essere)**
- Essere in grado di individuare gli strumenti matematici atti alla descrizione di fenomeni naturali elementari. Essere in grado di comprendere e risolvere problemi applicativi delle scienze naturali e geologiche, attraverso l'utilizzo consapevole e autonomo delle conoscenze acquisite.

Testi di riferimento

- 1. **D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, Matematica per le scienze della vita, Ambrosiana, 2008, seconda edizione 2012**
- 2. S. Montaldo, A. Ratto, **Matematica: 2^3 capitoli per tutti**
  Liguori, 2011
- 3. Pagani, Salsa, Matematica per i Diplomi universitari, Masson, 1997
- **4. Invernizzi, Matematica nelle Scienze Naturali, Libreria Goliardica Editrice, 1996**

I testi sono consultabili presso l'aula 16, la biblioteca del Dipartimento di Scienze geologiche e il Dipartimento di Matematica e Informatica

Modalità d’esame

Due prove scritte in itinere: una a metà corso (fine gennaio-febbraio) una a fine corso (giugno). Gli studenti che avranno superato nel complesso le prove in itinere sono ammessi alla prova orale. La prova orale può essere di due forme:

- Prova di conferma. In questo caso lo studente viene interrogato sugli esiti del suo elaborato e può avere confermato il voto dello scritto.
- Colloquio integrativo. In questo caso lo studente viene interrogato sugli esiti del suo elaborato e su tutti gli altri argomenti del programma. Il colloquio è finalizzato al miglioramento della votazione finale rispetto a quella dello scritto.

- Se la prova orale non è sufficiente lo studente dovrà ripetere la stessa. Se lo studente fallisce per due volte la prova orale dovrà ripetere la prova scritta.
- Gli studenti che non superano le prove in itinere potranno sostenere una delle prove scritte generali nelle date delle sessioni d’esame pubblicate nel sito del corso.

Possono sostenere le prove in itinere anche gli studenti non matricole

Dettaglio degli argomenti prime lezioni

- **Teoria degli insiemi.** Simboli ed elementi di logica matematica. Nozioni sugli insiemi. Operazioni tra insiemi. Prodotto cartesiano. Funzioni tra insiemi, dominio, codominio. Funzioni iniettive, suriettive e biiettive. Funzione inversa e funzioni composte
- **Numeri reali**. Numeri naturali. Numeri Interi. Numeri razionali. Numeri reali. Potenze e radici. Valore assoluto. Logaritmi. Rappresentazione decimale dei numeri reali.

Matematica e applicazioni
strumento interpretativo e di risoluzione di problemi delle scienze

- Quante strette di mano contiamo se 15 invitati ad una festa si vogliono salutare tutti una volta?

- In quanti modi posso sistemare 15 campioni di roccia in un classificatore che ne contiene due per volta?

Stesso quesito? Stesso problema matematico?

Il linguaggio della matematica: formule e simboli

- Quante strette di mano contiamo se 15 invitati ad una festa si vogliono salutare tutti una volta?

Combinazioni di n oggetti presi a due a due

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots . \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Combinazioni
e
Disposizioni

$$\binom{15}{2} = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{2 \cdot 1 \cdot 13!} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 15 \cdot 7 = 105$$

Il linguaggio della matematica: formule e simboli

- 1. Quante strette di mano contiamo se 15 invitati ad una festa si vogliono salutare tutti una volta?
- 2. Quanti numeri di 2 cifre (anche ripetute) si possono formare con le cifre 1, 2, 3 ?
- 3. Quanti numeri di 3 cifre si possono formare con le cifre 1, 2, 3 ?

1. Combinazioni (semplici) di n oggetti presi a k a k

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. Disposizioni con ripetizione di n oggetti a k a k

$$n(n-1)\cdot\ldots\ldots\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. Numero delle permutazioni di n oggetti

$$n!$$

Prerequisiti
Esempi tratti dalla prova d'ingresso

- L'insieme delle soluzioni della disequazione è

$$\frac{4}{4-x^2} \leq 1$$

$$\frac{x}{1-x^2} \geq 0$$

Prerequisiti
Esempi tratti dalla prova di settembre 2013

- L'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{4}{4-x^2} \leq 1$$

- è
- A. $(-2,0]\cup(2,+\infty)$
- B. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\cup\{0\}$
- C. $\{0\}$
- D. $(-2,2)$
- E. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

Prerequisiti
Esempi tratti dalla prova di settembre 2012

L'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x}{1-x^2} \geq 0$ è

- A. $[0, +\infty)$
- B. $[0, 1) \cup (1, + +\infty)$
- C. $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$
- D. $(-1, 1)$
- E. $[0, 1)$

Se $\log_3 \frac{6}{c} = 2$ allora *c* è uguale a $c = \frac{2}{3}$

Prerequisiti
Esempi tratti da test degli anni scorsi

$$P(a) = a^3 - a^2 - 3a + 1$$

$$P\left(\sqrt{2}\right) = ?$$

$$P\left(\sqrt{2}\right) = -1 - \sqrt{2}$$

$$P\left(\sqrt{2}\right) = -1 + \sqrt{2}$$

$$P\left(\sqrt{2}\right) = 3 - \sqrt{2}$$

$$P\left(\sqrt{2}\right) = 3 + \sqrt{2}$$

$$a^2 + b^2 = 58 \quad \wedge \quad ab = -21 \quad \Rightarrow \left(\mathrm{a} - b\right)^2 = ?$$

$$\left(\mathrm{a} - b\right)^2 = 16 \qquad ? \qquad \left(\mathrm{a} - b\right)^2 = 100$$

Prerequisiti
Esempi tratti da test degli anni scorsi

$$\sqrt{27}+\sqrt{12}=$$

$\sqrt{75}$

$\sqrt{69}$

$\sqrt{78}$

$\sqrt{50}$

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Per quali valori di a e b ?

Quante sono le soluzioni reali del sistema?

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2y^2=1 \end{cases}$$

$A=2$

$B=8$

$C=4$

$D=1$

$E=0$

Proprietà sempre verificate - Controesempi

Prerequisiti
Esempio tratto dalla prova di settembre 2010

Se a > 0 è un numero fissato, dire quale tra i seguenti è l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$a^2 - ax^2 > 0$$

- A. L'insieme dei numeri reali
- B. L'insieme vuoto
- C. L'insieme dei numeri reali x tali che $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$
- D. L'insieme dei numeri reali x tali che $x < -\sqrt{a}$ oppure $x > \sqrt{a}$
- E. L'insieme dei numeri reali x tali che $0 < x < \sqrt{a}$

Elementi di teoria degli insiemi

- Definizione. Un insieme è una collezione di oggetti, determinati e distinti, della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico. Tali oggetti si dicono elementi dell’insieme.

- Indichiamo gli insiemi con le lettere A,B,C,D. . .
- e gli elementi di un insieme con le lettere a, b, c, d . . .

- Se a è un elemento di A si scrive

$$a \in A \text{ (a appartiene ad A)}$$

- Se b non è un elemento di A si scrive

$$b \notin A \text{ (b non appartiene ad A)}$$

Identificare o definire un insieme

- **Per elencazione**

$$A = \{0,1, 2, 3, 4, 5\}$$

- **Proprietà caratteristica** (proprietà comune a tutti gli elementi dell'insieme)

$$A = \{n\text{:}\ n \in N \wedge n \leq 5\}$$

A è l'insieme degli *n* tali che *n* è un numero Naturale e (contemporaneamente)

$n \leq 5$, *n* minore o uguale a 5

Identificare o definire un insieme

- **Proprietà caratteristica** *P(x)*

$$A = \{x : x \in X \wedge P(x)\}$$

P(x) è una proprietà vera per ogni elemento di A ($\forall x \in A$ – $\forall$: quantificatore universale)

P(x) è una proprietà falsa (che non è verificata) per ogni elemento che non appartiene ad A ($\forall x \notin A$)

Fissando il valore di x , *P(x) può essere vera o falsa*

Esempio:

$$P(x) = x > \sqrt{2}$$

vera per *x=3,5* *falsa per x=0*

Trovare altri due valori per i quali *P(x)* è vera, *P(x)* è falsa

Identificare o definire un insieme
Proprietà caratteristiche e notazioni (quantificatori)

- $\forall x$ *per ogni x*

  quantificatore universale significa *per ogni x*, *qualunque x*

- $\exists x$ esiste *x*

  quantificatore esistenziale significa esiste almeno un *x*

- $\exists!\, x$ *esiste unico*

  quantificatore esistenziale significa esiste un solo *x*

Identificare o definire un insieme
Proprietà caratteristiche e notazioni
Esempi

- Quali elementi appartengono all'insieme?

A = {*x: x* $\in$ *N* $\wedge$ *P(x)= i possibili risultati del lancio di un dado*}

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

B = {*x:* $x \in \Re$ $\wedge$ *P(x)=* |*x*| $\geq$ *0* }

B = insieme di tutti i numeri reali

C = {*x: x* $\in$ *N* $\wedge$ *P(x)= x< 0*}

C = $\varnothing$ C è l'insieme vuoto : insieme che non contiene alcun elemento, non esiste nessun numero naturale *n* che verifica la proprietà *P(x)*

Operazioni con gli insiemi

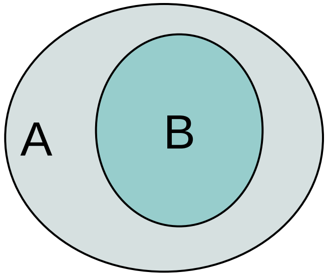
- Un insieme **B si dice sottoinsieme di A** se ogni elemento di B è anche un elemento di A e si indica con

$B \subseteq A$ (B è incluso in A).

ogni sottoinsieme è un sottoinsieme banale di se stesso $A \subseteq A$.

- Se un sottoinsieme B e strettamente contenuto in A, cioè esistono elementi di A che non appartengono a B (esiste almeno un elemento di A che non appartiene a B), si scrive

$B \subset A$ (B è strettamente incluso in A).



- Due insiemi per i quali valgono contemporaneamente **$B \subseteq A$ e $A \subseteq B$ si dicono uguali.**

Sottoinsiemi e relazione di inclusione nella Sistematica o Tassonomia

- Identificare le diverse specie viventi e dare loro un nome universalmente accettato
- Fare un elenco di tutte le specie viventi sulla terra e raggrupparle in classi progressivamente più estese (problema aperto)

Alcuni livelli e inclusioni **(strettamente inclusi).**

specie $\subset$ famiglia $\subset$ classe $\subset$ regno

Esempio

Coniglio (nome scientifico Oryctolagus cuniculus)

Cuniculus $\subset$ Leporidi $\subset$ Mammiferi $\subset$ Animale

Il numero di elementi che compongono un insieme A è detto cardinalità dell'insieme e indicato con $|A|$

Insiemi finiti – Insiemi infiniti

Esempi di insiemi infiniti

L'insieme dei numeri pari P = $\{p \in N : p = 2n\}$

- L'insieme dei numeri primi P = $\{p \in N : p$ è primo$\}$

Un numero $p \neq 1$ si dice primo se è divisibile solo per 1 e per se stesso. Il teorema di fattorizzazione dei numeri naturali assicura che ciascun numero sia scomponibile in modo unico come prodotto di potenze di numeri primi (detti fattori).

Esempi di insiemi finiti. Determinare, per elencazione i seguenti insiemi

L'insieme A = $\{p \in N : p = 2n + 1 \wedge 2n < 10{,}5\}$

B = $\{p \in N : p$ è un numero dispari minore di 10 $\}$

L'insieme C = $\{b \in \Re$: b è soluzione dell'equazione $x^2 + 2x + 1 = 0\}$

Dire se **$B \subseteq A$, $A \subseteq B$, $C \subseteq A$, $C \subseteq B$**

Operazioni con gli insiemi
Unione- Intersezione

Unione

- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$

Intersezione

- $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$

Esempio

A = {A, C, G, T} (insieme delle basi azotate DNA)

B = {A, C, G, U} (insieme delle basi azotate RNA)

Allora $A \cup B = \{A, C, G, T, U\}$

Allora $A \cap B = \{A, C, G\}$

Operazioni con gli insiemi
Differenza - Complementare

- Differenza
- $A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$

A = {A, C, G, T} (insieme delle basi azotate DNA)
B = {A, C, G, U} (insieme delle basi azotate RNA)

- $A \setminus B = \{T\}$

- Rispetto ad un dato insieme universo U possiamo definire una ulteriore operazione:

- • Complementare
- $C(A) = \{x \in U : x \notin A\}$
- Per esempio se U = N e A è l'insieme dei numeri pari, allora C(A) è l'insieme dei numeri dispari. (stiamo considerando 0 pari)

Prodotto cartesiano di A e B

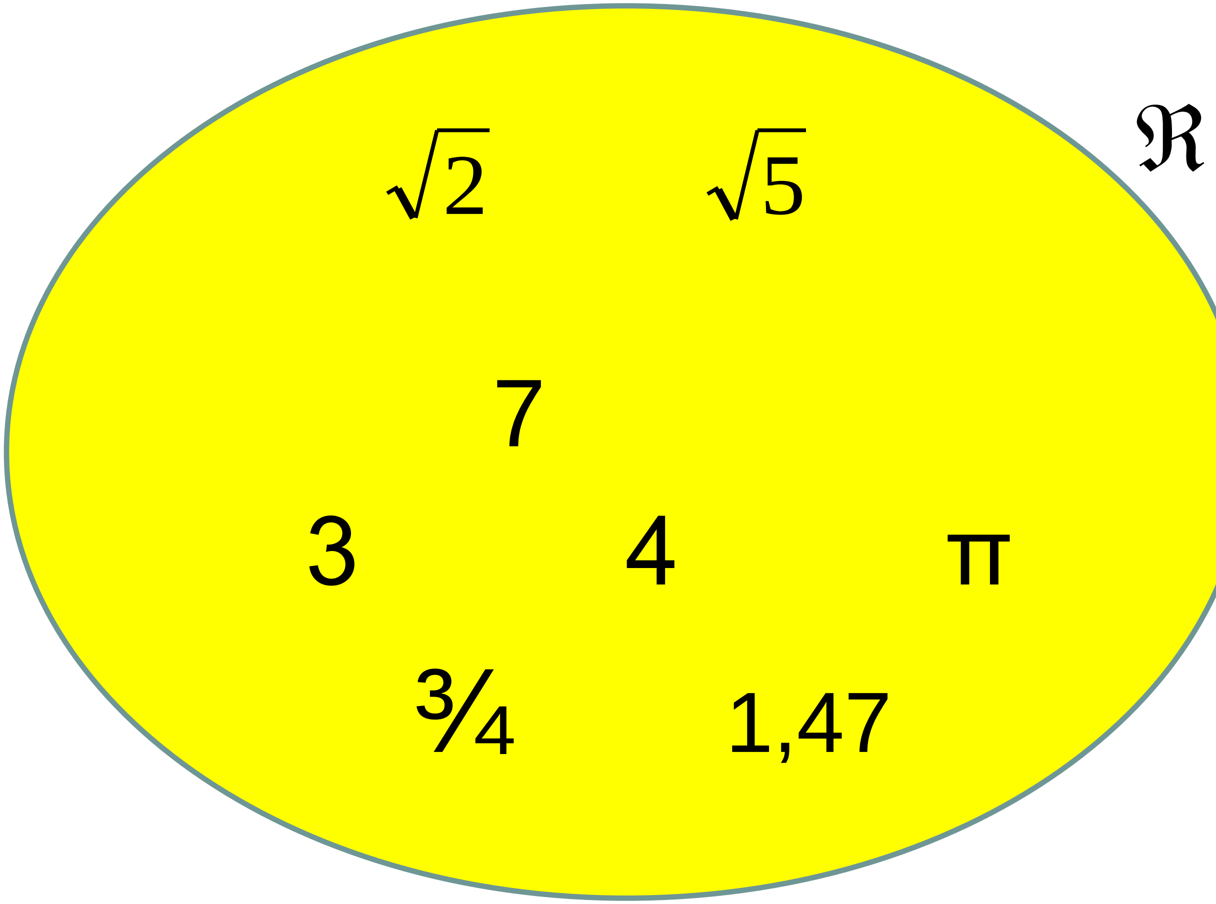
- Dati due insiemi A e B si possono considerare le coppie ordinate (a, b), con a $\in$ A e b $\in$ B.
- Una coppia si dice ordinata se il primo elemento appartiene al primo insieme ed il secondo al secondo insieme. Due coppie (a, b) e (a′, b′) sono uguali se a = a′ e b = b′.

- Definizione 1.3. Dati due insiemi A e B si dice prodotto cartesiano di A e B e si indica con A x B, l’insieme di tutte le coppie ordinate (a, b).

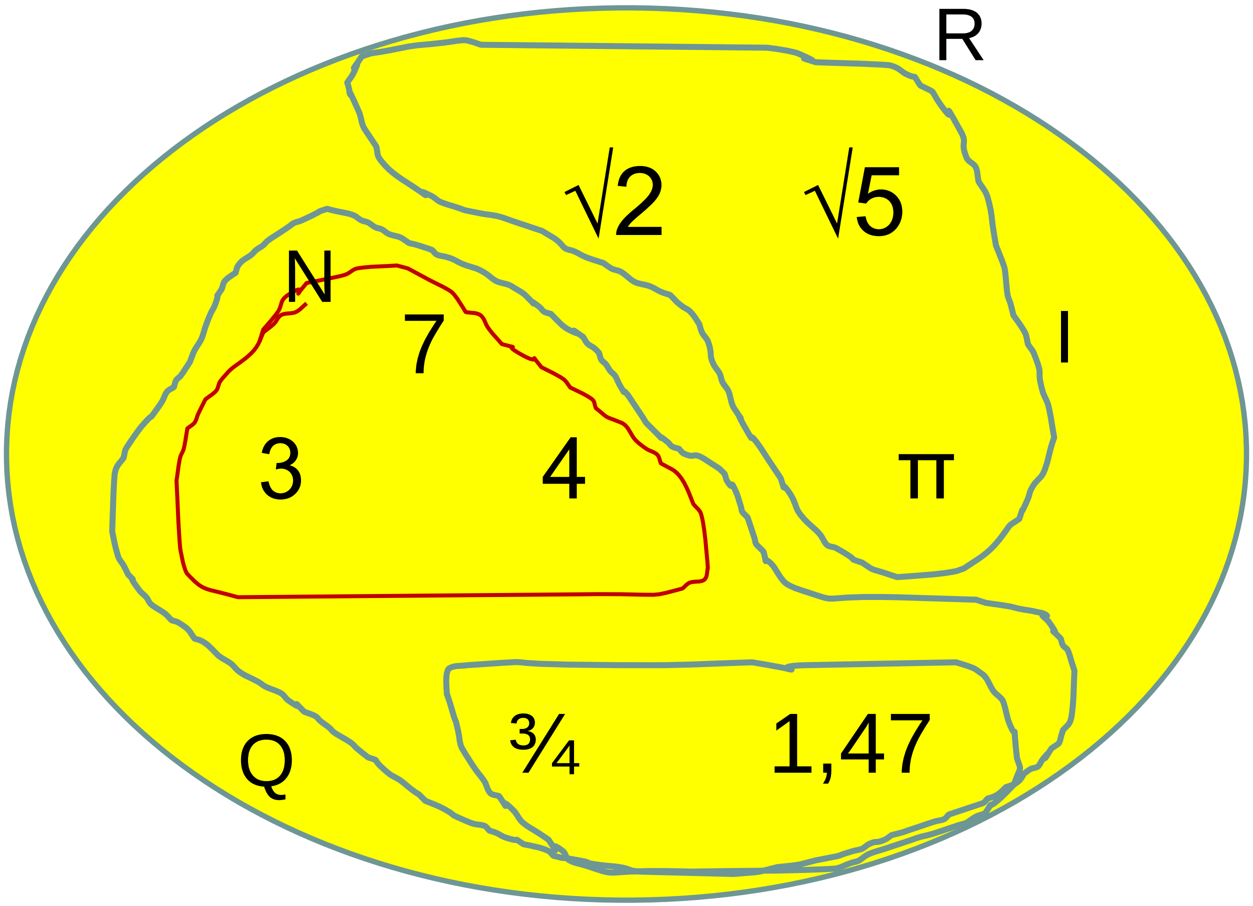
Esempio se A = {o, 1} e B = {a, b, c} il prodotto cartesiano è

- A x B = {(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)}

Individua sottoinsiemi di $\Re$



Definiamo i sottoinsiemi



Insiemi numerici

Notazioni utilizzate per denotare gli insiemi numerici

- N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . .} numeri naturali
- Z = {. . . − 4,−3,−2,−1, 0, 1, 2, 3, 4, . . .} numeri interi
- Q = {p/q : p, q $\in$ Z, q $\neq$ 0} numeri razionali
- I = numeri irrazionali $\sqrt{2},\ \pi,\ e$
- R numeri reali = Q $\cup$ I

Esercizio di sintesi sugli insiemi

Dati i due insiemi

- $A_t = \{x : x \in R \wedge (x^2 + t)<0 \}$
- $B = \{x : x \in R \wedge x(x^2 + 1)<0 \}$

Determinare al variare di $t \in R$

- $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$
- Se $\exists$ t tale che $A_t \subset B$

Esercizio di sintesi sugli insiemi

Dati i due insiemi

- $A_t = \{x : x \in R \wedge (x^2 + t)<0\}$
- $B = \{x : x \in R \wedge x(x^2 + 1)<0\}$

Determinare al variare di $t \in R$

- $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$
- Se $\exists t$ tale che $A_t \subset B$

Risoluzione

- Se $t \geq 0$
- $A_t = \varnothing$
- $B = \{x : x \in R \wedge x<0\}$
- $A_t \cup B = B$
- $A_t \cap B = \varnothing$
- $A_t \subset B$ SI

- Se $t < 0$
- $A_t = -\sqrt{|t|} < x < \sqrt{|t|}$
- $A_t \cup B = \left(-\infty, \sqrt{|t|}\right)$
- $A_t \cap B = -\sqrt{|t|} < x < 0$
- $A_t \subset B$ NO

$\varnothing \subseteq A \quad \forall A$

Esercizi. Determinazione di intervalli in R. Operazioni, equazioni e disequazioni in R

- Risolvere le disequazioni e determinare gli insiemi

$$A = \left\{ x : x \in \Re \wedge \frac{\sqrt[4]{x - \frac{1}{2}} + \ln^2 x}{x\left(x^2+1\right)} > 0 \right\}$$

$$B = \left\{ x : x \in \Re \wedge 3^x > 1 \right\}$$

- Determinare gli insiemi $A \cap B$ e $A \cup B$
- e dire se sono intervalli aperti o chiusi

Insiemi numerici

L'insieme dei numeri Irrazionali non è vuoto, contiene almeno radice di 2

$$\exists x :: x \neq \frac{p}{q}, \text{con } p \text{ e } q \text{ interi} \qquad \sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$$

Dimostrazione per assurdo (supponiamo che radice di due sia razionale)
Se lo fosse, allora potrebbe essere scritto nella forma p/q con p e q numeri interi primi fra loro ed elevando al quadrato si avrebbe

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \qquad p^2 = 2q^2$$

Da p^2 divisibile per 2 segue che anche p è divisibile per 2 p = 2k, k $\in$ Z.
Sostituendo si ottiene $4k^2 = 2q^2$ da cui, semplificando, $q^2 = 2k^2$. Ma allora anche q^2 è divisibile per 2 e di conseguenza anche q.

Contro l'ipotesi p e q non sarebbero primi fra loro

L'insieme dei numeri reali R

Rappresentazioni

- Rappresentazione decimale e forma frazionaria dei numeri razionali

X = a, $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5$ allineamento decimale finito o periodico

X = 12, 25 X = 1225/100 = 245/20 = 49/4

- Numero periodico e forma frazionaria

$$\frac{1}{3} = 0,\bar{3} = \frac{3}{9} \qquad 2{,}1\bar{3} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{3}{90} = \frac{192}{90} = \frac{32}{15}$$

- Oppure $2{,}1\bar{3} = \frac{213-21}{90} = \frac{192}{90} = \frac{32}{15}$ $\quad 2,\bar{9} = 3 \quad 2{,}5 = \frac{5}{2} \quad \frac{1}{5} = 1{,}5$

Esercizio. Dire se sono vere le uguaglianze:

L’insieme dei numeri reali R

misurare la diagonale di un quadrato di lato 1
risolvere l’equazione $x^2 - 2 = 0$
misurare la lunghezza di una circonferenza…

Forma polinomiale dei numeri reali

2585, 25

$2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 8 \times 10 + 5 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$

- Rappresentazione dei numeri reali

allineamento decimale infinito (numero infinito di cifre dopo la virgola)

$$X = a, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'insieme dei numeri reali R

misurare la diagonale di un quadrato di lato 1
risolvere l'equazione $x^2 - 2 = 0$
misurare la lunghezza di una circonferenza…

- Approssimazione, cifre significative, errore nella approssimazione
- $\pi = 3,141592\ldots\ldots$
- $3,141592 < \pi < 3,141593$

- $\alpha = (12,35 \pm 0,01)m$

indica che la lunghezza espressa in metri è compresa tra 12,34 *m* e 12,36 *m* *0,01 viene detto errore assoluto*

- Notazione scientifica
- Ogni numero positivo può essere scritto come prodotto di un numero compreso fra 1 e 10 per un'opportuna potenza di 10
- $321573 = 3,21573 \times 10^5$ $0,00015 = 1,5 \times 10^{-4}$

Operazioni in R

- Sono definite due operazioni, la somma e il prodotto,
- $a, b \to a + b$
- $a, b \to a\, b$
- Le due operazioni godono delle **proprietà**

commutativa $a + b = b + a$ $\qquad$ $a\, b = b\, a$

associativa $a + (b + c) = (a + b) + c$ $\qquad$ $a\,(b\, c) = (a\, b)c$

distributiva $(a + b)\, c = a\, c + b\, c$

- elemento neutro $a + 0 = a$ $\qquad$ $a\,(1) = a$
- elemento inverso $a + (-a) = 0$ $\qquad$ $a\, 1/a = 1 \quad \text{se } a \neq 0$

Ordinamento di R
Ordinamento totale

- In R è definito un ordinamento totale
- indicato con il simbolo $\leq$
- $\forall$ a, b $\in \Re$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$

- Questo ordinamento verifica le seguenti proprietà
- riflessiva $a \leq a$
- antisimmetrica se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$
- transitiva se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$

Ordinamento di R e operazioni di somma e prodotto:

- se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c$ per ogni $c \in R$
- se $a \leq b$ e $c > 0$ allora $ac \leq bc$
- se $a \leq b$ e $c < 0$ allora $ac \geq bc$

Intervalli della retta reale

- Siano P e Q due punti della retta reale di ascissa a e b rispettivamente,
- con $a < b$.

- Possiamo considerare i seguenti sottoinsiemi di R:
- [a, b] insieme dei numeri reali tali che $a \leq x \leq b$ **Intervallo chiuso**

- (a, b] insieme dei numeri reali tali che $a < x \leq b$ **Intervallo aperto**

- [a, b) insieme dei numeri reali tali che $a \leq x < b$
- (a, b) insieme dei numeri reali tali che $a < x < b$

A ciascuno di essi corrisponde il segmento di estremi P e Q;, nella rappresentazione sulla retta, gli estremi sono compresi o esclusi

Questi intervalli sono limitati, nel senso che la loro misura è finita o esiste un intervallo con estremi in R che li contiene

Intervalli in R

- Esistono anche intervalli illimitati:

- $(-\infty, a]$ insieme dei numeri reali tali che $x \leq a$
- $(-\infty, a)$ insieme dei numeri reali tali che $x < a$
- $[a,+\infty)$ insieme dei numeri reali tali che $x \geq a$
- $(a,+\infty)$ insieme dei numeri reali tali che $x > a$
- $(-\infty,+\infty)$ tutti i numeri reali

Esempi

Dire se sono intervalli aperti o chiusi

$(-\infty, -3.25] \cap [-7 , -3.3]$

$$\left[3.55, 4.\overline{9}\right] \cap \left(3.2, 5\right]$$

Completezza di R

- La proprietà di completezza (o di continuità) distingue i numeri reali dai numeri razionali Q

- Si definisce sezione di R una coppia (A, B) di sottoinsiemi non vuoti di R tali che
  - $A \cup B = R$, $A \cap B = \emptyset$
  - se $a \in A$ e $b \in B$ allora $a \leq b$

- **Proprietà di completezza** .

Per ogni sezione (A, B) di R esiste uno ed un solo numero reale ℓ tale che, $\forall\, a \in A$ e $\forall\, b \in B$ vale $a \leq \ell \leq b$.

- Il numero ℓ è detto elemento separatore di A e B.

Operazioni in R . Le Potenze

- Possiamo moltiplicare 5 per tre volte con se stesso, cioè formare il prodotto 5 x 5 x 5 e indicarlo con 5^3.
- Per qualsiasi numero reale: se a è un numero reale, la notazione a^3 sta a indicare *a x a x a.*

- In generale scriviamo a^n (*a* alla *n* oppure *a* elevato *n*),
- dove $n \in N$ rappresenta un numero naturale qualsiasi.

Chiamiamo a^n potenza di base *a* ed esponente *n*

Proprietà fondamentali delle potenze

$a^m a^n = a^{m+n}$

$a^m b^m = (ab)^m$ $\qquad$ $a^m/a^n = a^{m-n}$

$a^m/b^m = (a/b)^m$ $\qquad$ $(a^n)^m = a^{nm}$

$a^0 = 1$

Le Potenze con esponente reale

- Cosa significa elevare un numero reale *a* per −1?

- Consideriamo le proprietà delle potenze.
- Se prendiamo $m = 0$ e $n = 1$
- Nell'uguaglianza $a^m/a^n = a^{m-n}$ otteniamo
  - $1/a = a^{-1}$.
- Quindi a^{-1} è il reciproco di *a*.

- Allo stesso modo si ottiene $a^{-n} = 1/a^n$.
- <u>Quando a = 0</u> è possibile eseguire $a^n = 0$ ma non è possibile calcolare a^{-n}.
- Infatti si avrebbe $0^{-n} = 1/0^n = 1/0$.

Le Potenze con esponente reale

- Usando la proprietà $(a^n)^m = a^{nm}$ possiamo definire anche le potenze con esponente razionale.

- Esempio: caso in cui l'esponente vale 1/2
- In questo caso si ha $a^{1/2} = \sqrt{a}$

- Per definizione, la radice quadrata di un numero è un numero il cui quadrato da il numero iniziale. Da cui, usando la proprietà

- $(a^n)^m = a^{nm}$, segue che $(a^{1/2})^2 = a^{(1/2)2} = a^1 = a$.

- **<u>se a < 0,</u> la potenza $a^{1/n}$, con n pari, non ha senso.**
- **Infatti le radici pari dei numeri negativi non sono numeri reali.**

- <u>Se *a* > *0*,</u> la potenza a^x può essere definita per esponenti reali arbitrari *x*.

Le Potenze con esponente reale

- **<u>se a < 0,</u> la potenza $a^{1/n}$, con n pari, non ha senso.**
- **Infatti le radici pari dei numeri negativi non sono numeri reali.**

- <u>Se *a* > *0*,</u> la potenza a^x può essere definita per esponenti reali arbitrari *x*.

- **Esempi** $\quad 2^x \quad (\frac{1}{2})^x$

Dire per quali valori di k sono calcolabili per $\forall x \in \mathfrak{R}$

$$(k^2-2)^x \qquad\qquad (k-1)^{-2x}$$

Determinare il valore per $\quad x = 2,\ x = 10,\ x = -3,\ x = -10,\ x = 0$

Operazioni in R - I logaritmi

- Scegliamo una base $a > 0$ ($a \neq 1$) e consideriamo l'equazione esponenziale $a^x = b$, $b \in R$, $b > 0$

- L'equazione ammette sempre un'unica soluzione.
- Esempio, l'equazione $3^x = 9$
- ha soluzione $x = 2$ (unica)
- L'equazione $16^x = 4$ ha soluzione $x = 1/2$. L'equazione $(1/2)^x = 8$ ha soluzione $x = -3$.

- Ma qual è la soluzione dell'equazione $3^x = 8$?
    - x si chiama il logaritmo in base 3 di 8.

I logaritmi

- Definizione

Dati $a > 0$ ($a \neq 1$) e $b > 0$, chiamiamo logaritmo in base a di b il numero (univocamente determinato) x per il quale si ha

- $a^x = b$

E scriviamo $x = log_a b$

Logaritmi: proprietà e casi particolari

- Le proprietà generali sono:
  - $log_a\, b + log_a\, c = log_a(bc)$
  - $log_a\, b - log_a\, c = log_a(b/c)$
  - $log_a(b^n) = n\, log_a\, b$
  - $log_a\, a = 1$
  - $log_a\, 1 = 0$

- Esiste un ulteriore formula che permette di scrivere un logaritmo in base *a* in una base diversa *c*:
  - $\log_a b = \log_c b / \log_c a$

Operazioni in R

Il valore assoluto di un numero reale

Valore assoluto del numero reale *x* si indicata con |*x*|.

Esempio il valore assoluto di 2 è 2, il valore assoluto di −3 è 3   e |0| = 0.
Formalmente, al variare di x $\in \Re$, si definisce:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Valore Assoluto e misura

Fissato un punto P sulla retta reale (dotata di sistema di riferimento) di ascissa *x* la misura del segmento OP vale

x se $x > 0$ e vale $-x$ se $x < 0$.

La misura del segmento OP = $|x - 0| = |x|$. Distanza del punto P dall'origine del sistema di riferimento

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano

- Indichiamo il piano dotato di sistema di riferimento con
- $R \times R = R^2$. Assi coordinati *X* e *Y*

- Ad ogni punto P del piano è associata una coppia ordinata di numeri reali (x_P , y_P) e viceversa

- (x_P , y_P) sono le coordinate del punto P
- x_P è detta ascissa mentre y_P ordinata.

- Il punto di intersezione tra l'asse delle ascisse e quello delle ordinate prende il nome di origine ed è denotato con
- O.

Esempio grafico di valore assoluto di x

Distanza tra due punti

- Dati due punti sulla retta la distanza è
- $d(P,Q) = |x_Q - x_P|$

- Dati due punti nel piano

$P = (P_x, P_y)$ e $Q = (Q_x, Q_y)$

la distanza tra P e Q, denotata con *d(P,Q),* è data da

(rappresentiamo e calcoliamo la distanza)

$$d(P,Q) = \sqrt{(Q_x - P_x)^2 + (Q_y - P_y)^2}$$

Determinare la distanza dei punti $P = (-1, 3)$ $Q = \left(\frac{1}{2}, -3\right)$

Sistema di riferimento e rappresentazione (potenza e logaritmo)

Determinare i punti di coordinate (x, y) per i seguenti valori di x : 2, 4, -1/4, -1/2

$$y = 2^x \quad \text{e} \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Determinare i punti di coordinate (x, y) per i seguenti valori di x : 1, 2, 1/4, 1/2

$$y = \log_2 x$$

Relazioni tra variabili

Formule e parametri

$C = 2\pi r$ $A = \pi r^2$

Esempio: Calcolare il valore numerico della formula

$$w = \frac{2{,}75(a-b)r^2}{m-n}$$

sapendo che *a = 0,012; b = 0,009; r = 0,02; m = 8,1; n = 0,35*
(quale notazione conviene?)

Relazioni tra variabili ***xRy***

- Curve — Variabili x, y, z
- Funzioni — variabile dipendente, variabile indipendente

Esaminiamo

Circonferenza – Funzioni lineari - Retta – Funzione valore assoluto

Curve, Funzioni e rappresentazioni

Circonferenza centro l'origine e raggio 1:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Circonferenza di centro C (x_0, y_0) e raggio r

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Equazione di secondo grado in due variabili; non tutte le equazioni in due variabili di secondo grado rappresentano circonferenze.

Esempio.

$x^2 - y = 0$ è l'equazione di una parabola

che si può anche scrivere $y = x^2$

Funzioni lineari *f(x) = ax + b*

Rappresentazione grafica: retta passante per l'origine – retta in posizione generica

Equazione Retta (equazione di primo grado nelle variabili x e y):

$ax + by + c = 0$ forma implicita

$y = mx + q$ forma esplicita

m si chiama coefficiente angolare

$m = tg\alpha$ (tangente trigonometrica)

q, termine noto, nell'equazione in forma implicita, rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y

Esempi

$F(x) = 5x$ $f(x) = -5x + 2$

Rappresentare graficamente e determinare due punti uno appartenente e uno non appartenente alla retta

Equazione della Retta - equazione di primo grado nelle variabili x e y

- Retta passante per un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e coefficiente angolare *m*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- Retta passante per due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

Problema - risoluzione

Sappiamo che il fenomeno da studiare è lineare

$$P(t) = at + b$$

- DATI - Per una data varietà di pomodoro
- t = 12°c $P(t)$ = 40% dei semi
- t = 15°c $P(t)$ = 70% dei semi

- Determinare i valori di a e b
- Sapendo che A = (12, 40) e B = (15, 70) sono punto del grafico della funzione (retta generica)
- dal punto di vista matematico: determinare l'equazione delle retta passante per A e B

Problema – risoluzione

- Determinare i valori di a e b

$$P(t) = at + b \qquad\qquad y = at + b$$

- Sapendo che A = (12, 40) e B = (15, 70) sono punti del grafico della funzione (retta generica)
- Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 40 = 12a + b \\ 70 = 15a + b \end{cases}$$

a = 10 b = - 80

Problema - risoluzione

- Sapendo che il fenomeno è lineare

$$P(t) = at + b \qquad\qquad y = at + b$$

- Cioè che $\dfrac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta P(t)}{\Delta t} = a$ è costante

e che A = (12, 40) e B = (15, 70) sono punti del grafico della funzione

- Si può calcolare direttamente $\dfrac{\Delta P(t)}{\Delta t} = a = \dfrac{70 - 40}{15 - 12} = \dfrac{30}{3} = 10$

Problema - risoluzione

- Sapendo che il fenomeno è lineare

$$P(t) = at + b$$

- Imporre che A = (12, 40) e B = (15, 70) siano punti del grafico della funzione
- Utilizzando la formula che permette di calcolare l'equazione della retta, noti due suoi punti
- $\dfrac{P(t) - 70}{70 - 40} = \dfrac{t - 15}{15 - 12}$ da cui $P(t) = 10t - 80$

Funzioni – studio di fenomeni

- Le variabili che intervengono in un fenomeno naturale possono essere qualitative (descrivono caratteristiche) e quantitative (rappresentabili in termini di numeri reali)
- Individuare relazioni tra due variabili che descrivono il fenomeno

Chiamiamo D e D' gli insiemi dei valori assunti dalle variabili

- Una funzione *f* è una relazione tra gli elementi di due insiemi, D e D', con la seguente proprietà:

- *f* associa ad **ogni elemento** *v* di D **uno ed un solo** elemento *w* di D' $w = f(v)$

Funzioni – Dominio - Codominio

f associa ad **<u>ogni elemento</u>** *v* di D **<u>uno ed un solo</u>** elemento *w* di D' *w = f(v)*

D dominio

D' insieme immagine di D

mediante f $\subseteq$ *Codominio*

Insieme di definizione $\subseteq$ *D*

- Insieme di definizione e "calcolabilità"

3^x $\quad - 3^x$ $\quad (-3)^x$

$$\ln(-x+1) \qquad \frac{\sqrt{\ln(-x-1)}}{x^3}$$

Funzioni – Dominio – Codominio
Esercizi

Date le seguenti relazioni tra variabili dire se sono funzioni, determinare l'insieme di definizione, disegnare il grafico se si tratta di funzioni lineari.

$$PV = k \qquad \mathrm{k} \in \ ? \qquad P \in \ ? \qquad V \in \ ?$$

$$s(t) = vt + s_0 \qquad \mathrm{t} \in \ ?$$

$$f(x) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{x}} \quad x \in \Re \qquad f(x) = 3^{x^2} \qquad f(n) = (-3)^{\mathrm{n}} \quad n \in N$$

$$f(x) = \ln(-x+1) \quad x \in \Re \qquad g(x) = \frac{\sqrt{\ln(-x-1)}}{x^3}$$

Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Grandezze **scalari: descritte da un numero,**
Volume, temperatura, tempo, peso, posizione di un punto su una retta

Grandezze **vettoriali: descritte da un numero, da una direzione e da un verso**
Distanza di un punto dall'origine, velocità, forza

Nel caso generale
Un **vettore v** è una grandezza
caratterizzata da:

- **modulo (o ampiezza, o lunghezza)**
- **direzione**
- **verso**

Un **vettore v** è spesso indicato con il simbolo $\vec{V}$

Dal punto di vista algebrico il vettore che indica lo spostamento OP, si esprime assegnando lo spostamento x sull'asse delle X e lo spostamento y sull'asse delle Y

$\vec{V}$ **= V** = *(x, y)* vettore **v dello spazio a due dimensioni** di componenti x e y . Esempio **V** = *(3, 2)*

Vettori. Definizione algebrica

Un vettore **v** nello spazio n-dimensionale $\Re^n$, *con n = 1, 2, 3,* ……. è una qualsiasi sequenza di numeri reali

$$\mathrm{v} = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots, v_n)$$

$v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots$ sono dette componenti del vettore

Esempi. Il vettore nullo è il vettore costante le cui componenti sono nulle
Dati tre punti del piano (o di $\Re^2$) P = (2, 1), Q = (1,2), R = (3,3) individuare i segmenti orientati OP e QR

Il punto P può essere individuato come estremo del segmento orientato OP (che si individua considerando a partire dall'origine O, del sistema di riferimento, lo spostamento di 2 unità verso destra e di 1 unità verso l'alto). In modo analogo si può determinare il segmento orientato QR (l'estremo R si individua partendo dal punto Q considerando lo spostamento di 2 unità verso destra e di 1 unità verso l'alto)
Il punto di partenza è diverso ma lo spostamento è lo stesso: viene così individuato e definito un unico vettore **V** = *(2, 1)*

Modulo, direzione e verso non variano.

Esercizio. Determinare tre punti del piano che individuino lo spostamento corrispondente al vettore

$$\vec{v} = (3, -2)$$

Vettori. Determinazione del Modulo

Un vettore **v** nello spazio n-dimensionale $\Re^n$, *con n = 1, 2, 3,* ……. è una qualsiasi sequenza di numeri reali

$$\mathrm{v} = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots.., v_n)$$

$v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots$ sono dette componenti del vettore

Il **modulo** del **vettore v** (o lunghezza) $\quad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots. + v_n^2}$

Esempi. In $\Re^3$ consideriamo il vettore v = (1, 2, 3). Rappresentare il vettore e calcolare il modulo

Verificare che il modulo del vettore v = (1, 2, 3) esprime la distanza di P = (1,2,3) dall'origine.

Detta H la proiezione di P sul piano XY, A la proiezione di H sull'asse X e B la proiezione di H sull'asse Y, la distanza PO è data da

$$|PO| = \sqrt{|OH|^2 + |PH|^2} = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2 + |PH|^2}$$

Vettori. Operazioni con i vettori

Moltiplicazione per uno scalare.
Il prodotto di un vettore **v,** dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, con n = 1, 2, 3, ……. , per uno scalare $\gamma \in \Re$, è **il vettore** che si ottiene moltiplicando tutte le componenti del vettore per γ.

Il vettore $\gamma v = (\gamma v_1, \gamma v_2, \ldots\ldots, \gamma v_n)$ ha la stessa direzione di v, lo stesso verso se $\gamma > 0$,

verso opposto se $\gamma < 0$.
Il modulo (o lunghezza) di γv è dato dal prodotto $|\gamma v| = |\gamma| \cdot |v|$

Un **vettore di modulo 1 si chiama versore**

Dato il vettore **v** , con **v ≠ 0**, il vettore $\hat{v} = \frac{1}{|v|} v$

è il **versore** che esprime la direzione e il verso di **v**

Esempi. I versori corrispondenti alle direzioni e verso degli assi cartesiani sono
In $\Re^2$: $e_x = (1,0)$ $e_y = (0,1)$ In $\Re^3$ $e_x = (1,0.0)$ $e_y = (0,1.0)$ $e_z = (0,0,1)$

Vettori. Operazioni con i vettori

Moltiplicazione per uno scalare.
Il prodotto di un vettore **v,** dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, con n = 1, 2, 3, ……. , per uno scalare $\gamma \in \Re$, è **il vettore** che si ottiene moltiplicando tutte le componenti del vettore per γ.

Il vettore $\gamma v = (\gamma v_1, \gamma v_2, \ldots\ldots, \gamma v_n)$ ha la stessa direzione di v, lo stesso verso se $\gamma > 0$,

verso opposto se $\gamma < 0$.
Il modulo (o lunghezza) di γv è dato dal prodotto $|\gamma v| = |\gamma| \cdot |v|$

Dato il vettore v = (3, -1). Calcolare il prodotto per 1/2 e 2

Verificare che il prodotto ha come effetto una dilatazione o un rimpicciolimento lungo la stessa direzione e con lo stesso verso.

Applicare l'uguaglianza nei due casi
e verificare che $\left|\frac{1}{2}v\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \cdot |v|$ e $|-2v| = |-2| \cdot |v|$

Vettori. Operazioni con i vettori

Somma.
La somma di due vettori **v, u** dello spazio a due dimensioni è il vettore che ha per componenti la somma delle componenti . Scrivere il vettore somma di

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2) \qquad \mathrm{w} = ? \qquad \mathrm{w} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

Nel caso generale di vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, la somma di due vettori

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$$

è il vettore

$$\mathrm{w} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots\ldots\ldots, v_n + u_n)$$

Esempi. Determinare il vettore somma dei vettori *v = (2,1)* *u = (1,3)* *e* *v = (3,-2)* *u = (-1, -2)*

Rappresentazione grafica. La regola del parallelogramma permette di determinare il vettore somma che corrisponde alla diagonale del parallelogramma (dall'origine comune dei due vettori al vertice opposto)

Vettori. Operazioni con i vettori

Somma.
La somma di due vettori **v, u** dello spazio a due dimensioni è il vettore che ha per componenti la somma delle componenti . Scrivere il vettore somma di

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2) \qquad \mathrm{w} = ? \qquad \mathrm{w} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

Nel caso generale di vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, la somma di due vettori

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$$

è il vettore

$$\mathrm{w} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots\ldots\ldots, v_n + u_n)$$

Esempi. Determinare il vettore somma dei vettori *v = (2,1)* *u = (1,3)* *e* *v = (3,-2)* *u = (-1, -2)*

Rappresentazione grafica. La regola del parallelogramma permette di determinare il vettore somma che corrisponde alla diagonale del parallelogramma (dall'origine comune dei due vettori al vertice opposto)

Vettori. Operazioni con i vettori

Differenza.

La differenza di due vettori **v - u** dello spazio $\Re^n$ è il vettore che si ottiene sommando il primo con l'opposto dell'altro **w = v + (-1)u**

Se P e Q sono due punti di $\Re^n$, il vettore differenza che si ottiene sottraendo le coordinate esprime lo spostamento da P a Q e il modulo è la distanza PQ

$$\mathrm{P} = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n) \qquad \mathrm{Q} = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$$

$$\mathrm{w} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots\ldots\ldots, u_n - v_n)$$

$$|\,\mathrm{w}\,| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots\ldots + (u_n - v_n)^2}$$

Esempi.

Determinare il vettore differenza dei vettori *v = (2,1)* *u = (1,3)* *e* *v = (3,-2)* *u = (-1, -2) .*
Rappresentare graficamente il vettore differenza e calcolarne il modulo

Vettori. Operazioni con i vettori

Combinazione lineare.

Dati due vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ dello spazio $\Re^n$
e due numeri reali γ_1 e γ_2 il vettore $\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2$ Somma di vettori
(ciascuno ottenuto come prodotto di uno scalare per un vettore)

Si chiama combinazione lineare di coefficienti γ_1 e γ_2 dei due vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$

Nel caso generale di vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, e per qualunque k la combinazione lineare di k vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ …… $\mathbf{v_k}$, di coefficienti γ_1 , γ_2 …….. γ_k **è il vettore**

$$w = (\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots\ldots + \gamma_k v_k) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i v_i$$

Esempi. Determinare il vettore combinazione lineare dei vettori ***v*** *= (-2,1)* ***u*** *= (1,-3)* di coefficienti

$\gamma_1 = -3$ $\gamma_2 = -1/3$

Vettori. Operazioni con i vettori. Combinazione lineare, Baricentro e media pesata

Baricentro.

Dati k punti materiali P_i, di massa m_i, individuati dai vettori di posizione in R^3 $P_i = (x_i, y_i, z_i)$

detta M la massa totale $$M = \sum_{i=1}^{k} m_i$$

Il baricentro (centro di massa) è il vettore dato da

$$B = \left(\frac{m_1}{M} P_1 + \frac{m_2}{M} P_2 + \ldots\ldots + \frac{m_k}{M} P_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{M} P_i = \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{m_i}{M} x_i , \sum_{i=1}^{K} \frac{m_i}{M} y_i , \sum_{i=1}^{K} \frac{m_i}{M} z_i \right)$$

Esempio. Determinare il baricentro dei punti $P_1 = (1/2, 0)$, di massa $m_1 = 4$, $P_2 = (0,1)$, di massa $m_2 = 1$, $P_3 = (1, 0)$, di massa $m_3 = 2$, $P_4 = (1,1)$, di massa $m_1 = 3$,

Cioè il vettore combinazione lineare dei vettori
$\boldsymbol{v_1} = (1/2,0)$ $\boldsymbol{v_2} = (0,1)\ldots\ldots$ di coefficienti rispettivamente m_i/M

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto scalare (o prodotto interno).
Dati due vettori **v, u** dello spazio a due dimensioni **il prodotto scalare è un numero** (uno scalare) definito da (la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti)

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2) \qquad \mathrm{v} \cdot \mathrm{u} = (v_1 u_1 + v_2 u_2)$$

Nel caso generale di due vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, il prodotto scalare di

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$$

è il numero

$$\mathrm{v} \cdot \mathrm{u} = (v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots\ldots + v_n u_n) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} v_k u_k$$

Esempi.
Determinare il prodotto scalare dei vettori *v = (2,1)* *u = (1,3)* *e* *v = (3,-2)* *u = (-1, -2)*

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto scalare (o prodotto interno) e interpretazione geometrica
Dati due vettori **v, u il prodotto scalare è il numero** corrispondente al prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso tra le loro direzioni

Nel caso generale di due vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, il prodotto scalare di

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots.., v_n) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots.., u_n)$$

è il numero

$$\mathrm{v} \cdot \mathrm{u} = |\mathrm{v}| \cdot |\mathrm{u}| \cos\alpha$$

Importante conseguenza
Due vettori u e v sono ortogonali se e solo se il prodotto scalare è nullo

Dimostrazione
Siano **u ≠ 0 e v ≠ 0** ortogonali, $\Rightarrow$ *cos*$\pi/2 = 0$ e quindi per la proprietà di annullamento del prodotto il prodotto scale è nullo.
Se, invece il prodotto scalare è nullo, allora deve essere *cos*$\alpha = 0$ *e quindi* $\alpha = + \pi/2$ *oppure* $\alpha = - \pi/2$ *cioè i due vettori sono perpendicolari*

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto scalare (o prodotto interno) e interpretazione geometrica
Dati due vettori **v, u il prodotto scalare è il numero** corrispondente al prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso tra le loro direzioni

Nel caso generale di due vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, il prodotto scalare di

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n) \qquad \mathrm{v} \cdot \mathrm{u} = (v_1 u_1 + v_2 u_2)$$

è il numero

$$\mathrm{v} \cdot \mathrm{u} = |\mathrm{v}| \cdot |\mathrm{u}| \cos\alpha$$

Importante conseguenza
Due vettori u e v sono ortogonali se e solo se il prodotto scalare è nullo

Esempi
Calcolare il prodotto scalare dei vettori **u** = (2, 1,0) e **v** = (5, -1, 2). Determinare due vettori ortogonali e verificare che il loro prodotto scalare è nullo
Per quale valore di *a* i vettori $v_1 = (3a, 1)$ e $v_2 = (2, -1-a)$ sono ortogonali?

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto scalare e proiezioni ortogonali

Dati due vettori **v, u** α l' angolo compreso tra le loro direzioni e **û** il versore di **u**

il numero $$\mathrm{v} \cdot \hat{\mathrm{u}} = |\mathrm{v}| \cdot |\hat{\mathrm{u}}| \cos\alpha = |\mathrm{v}| \cos\alpha$$

è l'ascissa della proiezione del vettore **v** lungo la retta individuata dalla direzione di **u**

Essendo il modulo del versore uguale ad 1

Il vettore $$(\mathrm{v} \cdot \hat{\mathrm{u}})\hat{\mathrm{u}}$$ prodotto di uno scalare per un vettore

è il vettore proiezione ortogonale di v lungo **û** cioè lungo la direzione di **u**

Esempi

Determinare le proiezioni ortogonali d dei vettori $\mathbf{w_1}$ = (0, 3), $\mathbf{w_2}$ = (1, 1), $\mathbf{w_3}$ = (2, -1), lungo la direzione del vettore **v** = (2, 1) ; determinare un vettore $\mathbf{w_4}$ con la stessa proiezione ortogonale di $\mathbf{w_1}$ lungo la direzione di **v**

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto vettoriale in R^3

Dati due vettori **v, u** $\quad \mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$

il prodotto vettoriale v x u è il vettore dato da

$$\mathrm{v} \times \mathrm{u} = (v_2 u_3 - v_3 u_2, v_3 u_1 - v_1 u_3, v_1 u_2 - v_2 u_1) = \mathrm{v} \wedge \mathrm{u}$$

Il prodotto vettoriale è antisimmetrico $\quad \mathrm{v} \times \mathrm{u} = -\mathrm{u} \times \mathrm{v}$

Esempi

Verificare che il prodotto vettoriale dei vettori u = (2, 1,0) e v = (5, -1, 2) è antisimmetrico

il vettore che si ottiene come prodotto vettoriale di due vettori ha le seguenti proprietà:

Il modulo del vettore è dato da $\quad |\mathrm{v} \times \mathrm{u}| = |\mathrm{u}||\mathrm{v}| \sin \alpha \qquad$ con α angolo tra **v** e **u**

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto vettoriale

Dati due vettori **v, u** $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$

il prodotto vettoriale v x u è il vettore w dato da

$$\mathrm{w} = \mathrm{v} \times \mathrm{u} = (v_2 u_3 - v_3 u_2, v_3 u_1 - v_1 u_3, v_1 u_2 - v_2 u_1) = \mathrm{v} \wedge \mathrm{u}$$

il vettore **w** che si ottiene come prodotto vettoriale di due vettori ha le seguenti proprietà:

1. Il modulo del vettore è dato da $|\mathrm{v} \times \mathrm{u}| = |\mathrm{u}| |\mathrm{v}| \sin \alpha$ con α angolo tra **v** e **u**
2. La direzione del vettore **v** x **u** coincide con la direzione perpendicolare al piano individuato da **v** e **u**
3. Il verso coincide con quello determinato dalla **regola della mano destra** : si posizionano le prime tre dita in modo che ciascuno sia perpendicolare agli altri due, poi si punta il pollice secondo direzione e verso del vettore **v,** l'indice in quello del vettore **u , il medio indica il verso del vettore prodotto w = v** x **u**
   (guardando dalla freccia di **w = v x u** vediamo il vettore **v** ruotare in senso anti-orario verso **u**)

Vettori. Rette, piani e sistemi di equazioni

Due rette sono parallele se e solo se hanno la stessa direzione

Le rette di equazioni $px + qy = k$ e $p'x + q'y = k'$

sono parallele se i vettori (p, q) e (p', q') sono allineati cioè se (p, q) = λ (p', q') , con λ un opportuno numero reale

Un sistema lineare in due equazioni e due incognite (2 x 2) ha la seguente forma

$$\begin{cases} px + qy = k \\ p'x + q'y = k' \end{cases}$$

Perché il sistema abbia una soluzione deve esistere una coppia ordinata (x, y) che verifica contemporaneamente le due equazioni. La coppia rappresenta il punto di intersezione tra le due rette.

Cosa possiamo dire se le rette sono parallele? E se le rette sono coincidenti?

Vettori. Rette, piani e sistemi di equazioni

Le rette di equazioni $px + qy = k$ e $p'x + q'y = k'$

sono parallele se i vettori (p, q) e (p', q') sono allineati cioè se (p, q) = λ (p', q') , con λ un opportuno numero reale

Un sistema lineare in due equazioni e due incognite (2 x 2) ha la seguente forma

$$\begin{cases} px + qy = k \\ p'x + q'y = k' \end{cases}$$

Se le rette sono incidenti il sistema ha una sola soluzione
Se le rette sono parallele, il sistema non ha soluzioni
Se le rette sono coincidenti, il sistema ha infinite soluzioni

Le rette sono coincidenti se e solo se esiste un opportuno λ tale che (p, q, k) = λ (p', q' , k')

Le considerazioni fatte sull'esistenza delle soluzioni valgono anche nel caso di un sistema 3 x 3.
Le tre equazioni in tre incognite che costituiscono il sistema rappresentano piani nello spazio

Le stesse considerazioni valgono per lo spazio di dimensione n

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = k$$ è chiamato iperpiano

Vettori. Rette, piani e sistemi di equazioni

Un sistema lineare in tre equazioni e tre incognite (3 x 3) ha la seguente forma

$$\begin{cases} px+qy+rz=k \\ p'x+q'y+r'z=k' \\ p''x+q''y+r''z=k'' \end{cases}$$

Se i piani hanno un punto in comune, il sistema ha una sola soluzione (x_0, y_0, z_0)

Il sistema non ha soluzioni, i piani non hanno, punti, o rette comuni
Il sistema ha infinite soluzioni, che possono rappresentare rette o piani

Esempi. Dire se i sistemi ammettono una, nessuna o infinite soluzioni. Verificare attraverso il calcolo

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x - y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x+3{,}5y=1{,}7 \\ 7y=3{,}4+2x \end{cases}$$

Esempi. Risolvere con il metodo di sostituzione, confronto o riduzione (somma) i seguenti sistemi

$$\begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x - 2y-2z=6 \\ -x+3y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\frac{1}{2}y+z-1 \\ x=2y-2z+3 \\ -x+3y-2z=1 \end{cases}$$

Sistemi

Risolvere sistemi e Rappresentare le rette

Esempi. Dire se i sistemi ammettono una, nessuna o infinite soluzioni. Verificare attraverso il calcolo

$$\begin{cases} x - \dfrac{y}{2} = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 3y + 6 \\ x = 2 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Vettori e Matrici (elementi)

Un vettore v se rappresentato nella forma v = (x, y) è detto vettore riga,

mentre se rappresentato nella forma $\mathrm{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è detto vettore colonna

L'operazione che trasforma un vettore riga in un vettore colonna, o viceversa è detto Trasposizione

Una matrice 2x2 è una tabella di 4 numeri reali disposti su due righe e due colonne

$$T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dato un vettore $\mathrm{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e una matrice T, definiamo **il prodotto righe per colonne** della matrice per il vettore

$$\mathrm{w}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Il vettore w si dice trasformato di v mediante T, la prima componente del vettore trasformato si ottiene moltiplicando scalarmente la prima riga per il vettore v , la seconda moltiplicando scalarmente la seconda riga per il vettore **v**

Vettori e Matrici (elementi)

La matrice 2x2 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si chiama **matrice identità** perché lascia invariati tutti i vettori

Esercizio. Definire un vettore e verificare l'affermazione

Una tabella di numeri reali composta da *n* righe ed *m* colonne si dice matrice *n* x *m*)

Ogni elemento di una matrice è individuato da due indici, il primo indica la riga, il secondo la colonna, l'elemento generico T_{ij} è il numero che si trova all'incrocio tra la riga i e la colonna j

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & .. & T1m \\ T_{21} & .. & ... & .. & T_{2m} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .T_{ij}. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ T_{n1} & .. & .. & .. & T_{nm} \end{pmatrix}$$

Per indicare la matrice si usa anche la forma compatta $\mathrm{T} = \{T_{ij}\}$ con $i = 1,2,......,n \qquad j = 1,2,....,m$

Vettori e Matrici (elementi)

La forma generale di un sistema lineare di m equazioni ed n incognite è data da

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots. + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots. + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

I termini a_{ij} sono i coefficienti del sistema che possono essere rappresentati come elementi della matrice A, i termini noti possono essere rappresentati dal vettore ***b***, le incognite dal vettore ***x***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{1m} \\ a_{21} & .. & \ldots & .. & a_{2m} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & .. & .. & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Per indicare il sistema si usa anche la forma compatta $Ax = b$
Che si ottiene considerando il prodotto (righe per colonne) della matrice A per il vettore *x*

Matrici. Somma, moltiplicazione per uno scalare e prodotto

Date due matrici *n x m* , $A=\{A_{ij}\}$ e $B=\{B_{ij}\}$ con $i=1,2,......,n$ $j=1,2,....,m$
e uno scalare γ *,* *d*efiniamo

Somma di matrici $A+B=\{A_{ij}+B_{ij}\}$ è la matrice *n x m* che ha come elementi la somma dei corrispondenti elementi di *A* e di *B*

Moltiplicazione per uno scalare, la matrice $\gamma A=\{\gamma A_{ij}\}$ *n x m* che ha come elementi gli elementi di A moltiplicati per γ

Prodotto.
Data la matrice *A* con *n* righe e ***k*** **colonne**, e la matrice *B* con ***k*** **righe** e *m* colonne *d*efiniamo la **matrice prodotto righe per colonne**, una matrice *C = AB* **n x m**
il cui elemento *Cij* è ottenuto moltiplicando scalarmente l'i-esimo vettore riga di A per il j-esimo vettore colonna di B

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\ldots+A_{ik}B_{kj}=\sum_{r=1}^{n}A_{ir}B_{rj}$$

Matrici. Somma, moltiplicazione per uno scalare e prodotto. Matrice inversa. Esempi

ESEMPI. Date le due matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

e lo scalare $\gamma = -3$

Determinare la somma $A + B = \{A_{ij} + B_{ij}\}$ la moltiplicazione per lo scalare $\gamma A = \{\gamma A_{ij}\}$

Il prodotto righe per colonne $$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{ik}B_{kj} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}B_{rj}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \gamma A = \begin{pmatrix} -3 & 18 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + (-6)\cdot 3 & 1\cdot 1 + (-6)\cdot 0 \\ 1\cdot 5 + 2\cdot 3 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice inversa T^{-1} della matrice T è la matrice per la quale risulta $T\,T^{-1} = I = T^{-1}\,T$

Matrici. Somma, moltiplicazione per uno scalare e prodotto. Esempi e proprietà

Date tre matrici per le operazioni introdotte valgono le seguenti proprietà

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(\gamma A)B = \gamma(AB)$$

Il prodotto tra matrici è associativo $A(BC) = (AB)C = ABC$
Il prodotto tra matrici non è commutativo.

ESEMPIO **Catene alimentari**

Date le due matrici T e A

$$T = \begin{pmatrix} 0.62 & 0.73 & 0.81 \\ 0.58 & 0.41 & 0.70 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.75 \\ 0.15 & 0.40 \\ 0.31 & 0.55 \end{pmatrix}$$

che rappresentano rispettivamente

La quantità in microgrammi per grammo delle sostanze tossiche (mercurio Hg ed erbicidi E) presenti in tre specie di alghe a_1, a_2, a_3 e la quantità media misurata in grammi delle tre specie di alghe a_1, a_2, a_3 di cui si cibano giornalmente due specie di crostacei c_1 e c_2

Determinare la quantità di ciascun tipo di inquinante ingerita da ciascuna specie di crostacei.

Soluzione dell'esempio

ESEMPI. **Catene alimentari**

Date le due matrici T e A

$$T = \begin{pmatrix} 0.62 & 0.73 & 0.81 \\ 0.58 & 0.41 & 0.70 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.75 \\ 0.15 & 0.40 \\ 0.31 & 0.55 \end{pmatrix}$$

che rappresentano rispettivamente

La quantità in microgrammi per grammo delle sostanze tossiche (mercurio Hg ed erbicidi E) presenti in tre specie di alghe a_1, a_2, a_3
e la quantità media misurata in grammi delle tre specie di alghe a_1, a_2, a_3 di cui si cibano giornalmente due specie di crostacei c_1 e c_2

Determinare la quantità di ciascun tipo di inquinante ingerita da ciascuna specie di crostacei.

$$TA = \begin{pmatrix} 0.48 & 1.20 \\ 0.40 & 0.98 \end{pmatrix}$$

I termini della matrice rappresentano rispettivamente la quantità di Mercurio ingerita dal primo e dal secondo crostaceo c_{11} e c_{12} e quantità di Erbicidi ingerita dal primo e dal secondo crostaceo.

Determinante di Matrici. Matrice singolare e risoluzione di sistemi omogenei

Si chiama Determinante di una matrice T 2x2 , e si indica con il numero reale

$$\det T = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det T = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}$$

La matrice T è invertibile se e solo se $\det T \neq 0$. In tal caso la matrice T è detta **non singolare**. In caso contrario la matrice è detta matrice singolare

Se la matrice *T* è non singolare, allora la matrice inversa T^{-1} è la matrice che esprime l'unica soluzione del sistema $Tv = w$ nell'incognita v
e si ha $\mathbf{v} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{w}$

Tale risultato vale per una qualunque matrice $n \times n$
Se la matrice *T* è singolare, allora il sistema $\mathbf{Tv = 0}$ nell'incognita **v,** ha, oltre alla soluzione nulla, anche un numero infinito di soluzioni $\mathbf{v} \neq 0$

Esempio. Verificare che la matrice A è singolare e risolvere il sistema Av = 0

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 18 \end{pmatrix}$$

Rappresentare nel piano cartesiano

Determinante di Matrici. Matrice singolare e risoluzione di sistemi omogenei

Si chiama Determinante di una matrice T 2x2 , e si indica con il numero reale

$$\det T = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det T = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}$$

La matrice T è invertibile se e solo se $\det T \neq 0$. In tal caso la matrice T è detta **non singolare**. In caso contrario la matrice è detta matrice singolare

Se la matrice *T* è non singolare, allora la matrice inversa T^{-1} è la matrice che esprime l'unica soluzione del sistema Tv = w nell'incognita v

e si ha **$\mathbf{v} = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{w}$** Tale risultato vale per una qualunque matrice $n \times n$

Se la matrice *T* è singolare, allora il sistema **Tv = 0** nell'incognita **v,** ha, oltre alla soluzione nulla, anche un numero infinito di soluzioni **v** $\neq 0$

Se la matrice *T* è singolare, allora il sistema **Tv = b** nell'incognita **v,** con **b ≠ *0*** , può avere nessuna o infinite soluzioni

Esempio. Trasformare il sistema *Av = b.* in forma algebrica e risolverlo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -12 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rappresentare nel piano cartesiano

Determinante di Matrici n x n

Data la matrice $\mathrm{T} = \{T_{ij}\}$ con $i = 1,2,......,n$ $j = 1,2,....,n$

Si chiama **matrice complementare** dell'elemento Tij, la matrice ottenuta sopprimendo l'i-esima riga e la j-esima colonna alle quali appartiene l'elemento.

Tale matrice interviene nel calcolo del determinante di una generica matrice n x n

Il Determinante di una matrice *T* n x n , si calcola con il seguente procedimento

- si sceglie una riga arbitraria
- **si calcolano i determinanti di tutte le matrici complementari degli elementi della riga scelta**
- **si moltiplicano i determinanti per i rispettivi elementi moltiplicati per -1 o 1 con il seguente criterio:**
  - **l'elemento T_{ij} ha segno positivo se i + j è pari, negativo se i + j è dispari.**
- si sommano i prodotti così ottenuti.

La regola può essere applicata anche scegliendo una qualunque colonna invece che una riga.

Risoluzione di sistemi . Regola di Cramer

Data la matrice $\mathrm{T} = \{T_{ij}\}$ con $i = 1,2,\ldots\ldots,n$ $\quad j = 1,2,\ldots.,n$

Matrice dei coefficienti del sistema Tv = w nell'incognita v = (x_1, x_2, ….x_n), di termine noto w = (b_1, b_2, …b_n)

Se la matrice è non singolare il sistema ha una unica soluzione e si ottiene calcolando

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det T}$$

Per j = 1, 2, …n. Dove B_j è la matrice ottenuta sostituendo w alla colonna Tj della matrice T

Esempio. Trovare la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -x + 3y + z = 0 \\ x + 7z = 1 \end{cases}$$

Si ha det T = 15,

x = 1, y = 1/3, z = 0

Esempi di quesiti delle prove scritte

- Dati i due vettori **v** e **w**, calcolare modulo, direzione e rappresentare **v**; calcolare e rappresentare la somma **v + w** e stabilire se i vettori sono perpendicolari

$$\mathrm{v} = (3, -6) \qquad \mathrm{w} = (4, 2)$$

- Determinare le soluzioni, se esistono, del seguente sistema dato in forma vettoriale

$$Ax = b \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Determinare per quali valori di λ il sistema ha soluzione unica e determinarla per $\lambda = -2$

$$Ax = b \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \frac{1}{3} & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Funzioni – Dominio – Codominio
II Parte

Date le seguenti relazioni tra variabili dire se sono funzioni, determinare l'insieme di definizione, disegnare il grafico se si tratta di funzioni lineari.

$PV = k$ $\quad$ $\mathrm{k} \in\ ?$ $\quad$ $P \in\ ?$ $\quad$ $V \in\ ?$

$s(t) = vt + s_0$ $\quad$ $\mathrm{t} \in\ ?$

$(-3)^{\mathrm{x}} \quad x \in \Re$ $\qquad$ $-3^{\mathrm{x}} \quad x \in \Re$ $\qquad$ $(-3)^{\mathrm{n}} \quad n \in N$

$f(x) = \ln(-x+1)$ $\quad$ $x \in \Re$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(-x-1)}}{x^3}$

Valore assoluto di *x*
Valore assoluto di *f(x)*

Valore assoluto del numero reale *x* si indicata con |*x*|.

Esempio il valore assoluto di 2 è 2, il valore assoluto di −3 è 3 e |0| = 0.

Formalmente, al variare di x $\in \Re$, si definisce:

La funzione Valore Assoluto

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

|x + 1| = *?* *se x ≥ -1*

? *se x < - 1*

Valore assoluto di una funzione

Esempio

$$\left|x^2+3\right| = \begin{cases} x^2+3 & \text{per} \quad x^2+3 \geq 0 \\ -\left(x^2+3\right) & \text{per} \quad x^2+3 < 0 \end{cases}$$

Rappresentazione grafica di $y = f(x)$

e di $y = |f(x)|$

Valore assoluto di una funzione

Esempio

$$\left|x^2+3\right| = \begin{cases} x^2+3 & \text{per} \quad x^2+3 \geq 0 \\ -\left(x^2+3\right) & \text{per} \quad x^2+3 < 0 \end{cases}$$

Rappresentazione grafica di *y* = *f(x)*

e di *y* = |*f(x)* |

Esempio *f(x)* = x^2 *-3x +1* *funzione quadratica – rappresentazione grafica*

y = x^2 *-3x +1* *equazione della parabola*

Valore assoluto di una funzione

Esempio

$$\left|x^2-3\right| = \begin{cases} x^2-3 & \text{per} \quad x^2-3 \geq 0 \\ -\left(x^2-3\right) & \text{per} \quad x^2-3 < 0 \end{cases}$$

Rappresentazione grafica di *y = f(x)*

e di *y* = |*f(x)* |

Esempio *f(x)* = x^2 *-3x +1* *funzione quadratica – rappresentazione grafica*

$y = x^2 -3x +1$ *equazione della parabola*

ascissa vertice della parabola $x_v = -b/2a$

Funzione definita a tratti
Funzione costante a tratti

Funzione definita a tratti se la relazione tra le variabili che la definisce assume forme diverse in domini diversi (Rappresentare il grafico)

$$G(T)=\begin{cases} 6T-90 & \text{se} \quad 15 \le T \le 30 \\ 90 & \text{se} \quad 30 < T < 35 \\ -18T+720 & \text{se} \quad 35 \le T \le 40 \end{cases}$$

Funzione costante a tratti se la relazione tra le variabili che la definisce assume valori costanti diversi in domini diversi
Caso particolare: funzioni a gradino

$$g(z)=\begin{cases} -2 & \text{se} \quad z \le 0 \\ -1 & \text{se} \quad 0 < z < 3{,}5 \\ 1 & \text{se} \quad z \ge 3{,}5 \end{cases}$$

Funzioni e simmetrie

Funzione pari $f(-x) = f(x)$

il grafico è simmetrico rispetto all'asse y

Esempio $f(x) = x^2$ *parabola con vertice nell'origine*

$f(x) = \cos x$

Funzione dispari $f(-x) = - f(x)$

il grafico è simmetrico rispetto all'origine

Esempi $f(x) = tgx$ $f(x) = senx$

Funzioni e traslazioni

Traslazione di vettore parallelo all'asse y

Data la funzione *f(x)* e noto il suo grafico:

il grafico della la funzione $f(x)-x_0$ si ottiene traslando il grafico di *f(x)* di x_0 unità in verso negativo (verso il basso)

il grafico della la funzione $f(x)+x_0$ si ottiene traslando il grafico di *f(x)* di x_0 unità in verso positivo (verso l'alto).

Determinare il tipo di traslazione disegnando il grafico delle funzioni

$f(x) = x^2$ $\quad g(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ $\qquad h(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

Verificare disegnando il grafico delle tre funzioni esponenziali

$f(x) = 5^x$ $\quad g(x) = 5^x - 1$ $\qquad h(x) = 5^x + 1$

Determinare il dominio D e il segno delle tre funzioni $\forall x \in D$

Funzioni composte

- Date le due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ se l'immagine di f è inclusa nell'insieme di definizione di g (il dominio della g coincide con il codominio della f) si può costruire la funzione composta (f composto g)
  - $g \circ f : A \to C$ nel modo seguente:
    - $x \to f(x) \to g(f(x))$.

Quindi $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Esempio

- $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2^x$. La funzione g è definita $\forall x \in \Re$
- Quindi possiamo costruire la funzione composta $g \circ f$
- $$x \xrightarrow{f} 2x + 1 \xrightarrow{g} 2^{2x+1}$$

Funzioni iniettive, suriettive

- Una funzione f : $A \rightarrow B$ **si dice iniettiva** se
  - $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

- o, in modo equivalente, f è iniettiva se
- $f(x_1) = f(x_2)$ implica che $x_1 = x_2$.

Esempio

h(x) = tgx *è iniettiva*

w(x) = senx *non è iniettiva*

- Data una funzione f : $A \rightarrow B$ chiamiamo immagine di f l'insieme di tutti gli elementi di B che sono immagine di qualche elemento di A:

$$\mathrm{Imm}(f) = \{b \in B : \exists\, a \in A \text{ con } f(a) = b\} \subseteq B.$$

- Una funzione f : $A \rightarrow B$ **si dice suriettiva** se Imm(f) = B.

Funzioni biiettive
Funzione inversa

- Una funzione $f : A \to B$ si dice **biiettiva se è simultaneamente iniettiva e suriettiva.**

Esempio

- Le funzioni biiettive sono invertibili.

Data una funzione biiettiva $f : A \to B$ **l'inversa di f, denotata con**

$f^{-1} : B \to A$, è l'unica funzione da B in A tale che se

$y = f(x)$ allora $f^{-1}(y) = x$.

Esempio

$$f(x) = tgx \qquad f^{-1}(x) = arctgx$$

Bisogna considerare una restrizione del dominio.

Sono invertibili in un dato intervallo I le funzioni monotone in I (sempre crescenti, o sempre decrescenti nell'intervallo)

Funzioni crescenti, decrescenti

Data la funzione *f(x)* definita nel dominio $D \subseteq \Re$

Definizione.

f(x) si dice crescente nell'intervallo $I = [a, b] \subseteq D$ se

$$\forall\, \mathbf{x_1} \textbf{ e } \mathbf{x_2} \in \mathbf{I} \qquad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f\,(x_1) \leq f(x_2)$$

Definizione.

f(x) si dice decrescente nell'intervallo $I = [a, b] \subseteq D$ se

$$\forall\, \mathbf{x_1} \textbf{ e } \mathbf{x_2} \in \mathbf{I} \qquad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f\,(x_1) \geq f(x_2)$$

Esempi

$f(x) = x^2$ $\quad g(x) = 5^x - 1$ $\quad h(x) = tgx$ $\quad w(x) = senx$

Funzioni limitate - massimi e minimi locali e assoluti

Data la funzione *f(x)* definita nel dominio $D \subseteq \Re$:

Definizione.

Si dice che f(x) ha un punto di **massimo locale** in $x_o \in \mathbf{I}$, $I = [a, b] \subseteq D$, se

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I} \qquad f(x_0) \geq f(x)$$

tale valore **max f = $f(x_0)$, $\in$ f(D) insieme immagine o codominio di f**

Definizione.

Si dice che f(x) ha un punto di **minimo locale** in $x_o \in \mathbf{I}$, $I = [a, b] \subseteq D$, se

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I} \qquad f(x_0) \leq f(x)$$

tale valore **min f = $f(x_0)$, $\in$ f(D) insieme immagine o codominio di f**

Esempi

$f(x) = (x + 1)^2$ $\qquad$ $g(x) = 5^x - 1$

Massimi e minimi locali e assoluti
Funzioni limitate

Data la funzione *f(x)* definita nel dominio $D \subseteq \Re$:

Definizione. Massimo e minimo assoluti

Si dice che il valore **max f = $f(x_0)$ è massimo assoluto di** f(x) in tutto il suo Dominio D se

$$\forall x \in D \qquad f(x_0) \geq f(x)$$

Si dice che il valore **min f = $f(x_0)$ è minimo assoluto di** f(x) in tutto il suo Dominio D , se

$$\forall x \in D \qquad f(x_0) \leq f(x)$$

tale valore **min f = $f(x_0)$, $\in$ f(D) insieme immagine o codominio di f**

Esempi

$f(x) = -(x+1)^2 + 2$ massimo assoluto = 2 (valore assunto per x = - 1)

non ha minimo assoluto $\in \Re$

Funzioni limitate
Data la funzione *f(x)* definita nel dominio $D \subseteq \Re$

Definizione. Funzione limitata

Si dice che f(x) è limitata in tutto il suo Dominio D

Se il codominio è un insieme (intervallo) limitato (può essere sia chiuso che aperto), sottoinsieme proprio di $\Re$

Cioè se il massimo e il minimo assoluti sono appartenenti ad $\Re$, oppure

Se l'estremo superiore e inferiore sono appartenenti ad $\Re$, quando il codominio è un intervallo aperto

Esempi

$f(x) = (x + 1)^2$ *funzione limitata solo inferiormente*

Codominio $= [0, +\infty[$ *Min* $f = 0$, *sup* $f = +\infty$

$g(x) = 5^x - 1$ *funzione limitata solo inferiormente*

Codominio $=]-1, +\infty[$ *inf* $f = -1$, *sup* $f = +\infty$

Funzioni e studio del grafico

Esempi

$f(x) = -(x+1)^2 + 2$

$g(x) = 5^x - 1$

$h(x) = tgx$ $\qquad$ $w(x) = senx$

Determinare il dominio D, il segno delle funzioni

$\forall x \in D$, *dire se sono crescenti, decrescenti in D*

Dire se il codominio è un intervallo aperto o chiuso, determinare un intervallo in cui f, g, h e w siano limitate.

L'operazione di limite per funzioni di una variabile

Esempio $f(x) = tgx$ Dominio $x \neq \pi/2 + k\pi$

Consideriamo la restrizione di f all'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$ e studiamo il comportamento di f agli estremi dell'intervallo

Diciamo che per x che tende a $\pm\,\pi/2$ la funzione f(x) tende a $\pm\infty$ o, in modo equivalente, la funzione ha limite $\pm\infty$, o la funzione è divergente (convergente a $\pm\infty$)

Definizione

f(x) tende a $+\infty$, per x che tende a $\pi/2$ da sinistra, se $\forall k>0$ $\exists\delta(k)$ tale che $f(x) > k$ per $\forall x\in(\pi/2 - \delta(k), \pi/2)$

La retta $x = \pi/2$ è un asintoto verticale per la funzione tgx

Esempio

Verificare che *tgx* tende a $-\infty$ per *x* che tende a $-\pi/2$ da destra

L'operazione di limite per funzioni di una variabile

Esempio $f(x) = 2^x$ Dominio $\Re$

Diciamo che per x che tende a $-\infty$ f(x) tende a 0 o, in modo equivalente, la funzione ha limite zero, o la funzione è convergente a zero

Definizione

f(x) tende a ℓ, per *x* che tende a $-\infty$ se $\forall \varepsilon>0$ $\exists \kappa(\varepsilon)>0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{per} \quad \forall x < -\kappa$$

La retta y = 0 è un asintoto orizzontale per la funzione $f(x) = 2^x$ Esempio

Verificare che $f(x) = (1/2)^x$ tende a zero per *x* che tende a $+\infty$

L'operazione di limite per funzioni di una variabile

Definizione

f(x) tende a ℓ, per *x* che tende a + ∞ se $\forall\varepsilon>0\ \exists\kappa(\varepsilon)>0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{per} \qquad \forall x > \kappa$$

Cioè risulta $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ per $\forall x > \kappa$

Definizione

f(x) tende a ℓ, per *x* che tende a x_0 se $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{per} \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Cioè risulta $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ per $\forall x,\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

L'operazione di limite - proprietà

Definizione

Date due funzioni, il limite della somma è uguale alla somma dei limiti

Se f(x) tende a ℓ_1, g(x) tende a ℓ_2 per *x* che tende a x_0 allora

lim(f(x) + g(x)) = $\ell_1 + \ell_2$ per x che tende a x_0

Si ha il caso di forme di indecisione quando a $\ell_1 = \pm\infty$ $\ell_2 = \mp\infty$

Esempi. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-2^x + x\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\left(3x + x^2\right) = 10$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(5x + x^2\right)$$

L'operazione di limite - proprietà

Definizione

Date due funzioni, il limite della somma è uguale alla somma dei limiti

Se f(x) tende a ℓ_1, g(x) tende a ℓ_2 per *x* che tende a x_0 allora

lim(f(x) + g(x)) = $\ell_1 + \ell_2$ per x che tende a x_0

Si ha il caso di forme di indecisione, o indeterminate,
quando a $\ell_1 = \pm\infty$ $\ell_2 = \mp\infty$

Esempi. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-2^x+x\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2}\left(3x+x^2\right)=6+4=10=f(2)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x+x^2\right)=-\infty+\infty$$

Trasformare in modo da modificare ed eliminare la forma indeterminata

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x+x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{3}{x}+1\right)=?$$ Limite del prodotto?

L'operazione di limite - proprietà

Definizione. Date due funzioni, il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti

Se f(x) tende a ℓ_1, g(x) tende a ℓ_2 , per *x* che tende a x_0 , allora

$$\lim(f(x) \times g(x)) = \ell_1 \times \ell_2 \qquad \textit{per x che tende a } x_0$$

Si ha il caso di forme di indecisione quando a $\ell_1 = \pm\infty$ $\ell_2 = 0$ (o viceversa)

Definizione Date due funzioni, il limite del rapporto è uguale al rapporto dei limiti

Se f(x) tende a ℓ_1, g(x) tende a ℓ_2 , per *x* che tende a x_0 , allora

$$\lim(f(x)/g(x)) = \ell_1 / \ell_2 \qquad \textit{per x che tende a } x_0$$

Si ha il caso di forme di indecisione quando a $\ell_1 = \pm\infty$ $\ell_2 = \pm\infty$
Oppure quando $\ell_1 = 0$ $\ell_2 = 0$

L'operazione di limite - proprietà

Sia *c* $\in \Re$ **e** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **allora**

$$\lim_{x\to+\infty} \left(c + f(x)\right) = +\infty$$

$$se \quad c \neq 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} cf(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad c > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad c < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{c}{f(x)} = 0$$

Le stesse proprietà valgono se sostituiamo a *c* una funzione *g(x)* che converge a *c* per *x* che tende a + ∞

Studiare il comportamento della funzione $f(x) = -2e^x$ agli estremi del dominio

L’operazione di limite - Esempi

Esempi. Studiare il grafico della funzione

$$f(x)=\frac{3}{x^2}$$

***D* = $\Re \setminus \{0\}$ *o* $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.**

Determinare comportamento agli estremi del dominio e eventuali asintoti.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ asintoto verticale $x = x_0$

Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ asintoto orizzontale $y = L$

Se $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx\right)$ asintoto obliquo $y = mx + q$

L'operazione di limite – proprietà Velocità di convergenza, di divergenza

Siano f e g due funzioni divergenti (che convergono ad infinito per x→±∞). Allora per il limite del rapporto possiamo avere i seguenti casi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty \quad \text{si dice che } f \text{ è diverge più rapidamente di } g \text{ (ordine di infinito superiore)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \quad \text{si dice che } f \text{ è diverge meno rapidamente di } g \text{ (ordine di infinito inferiore)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0 \quad \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ divergono con la stessa velocità (stesso ordine di infinito)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \quad \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ divergono asintoticamente ad infinito}$$

L'operazione di limite – proprietà Velocità di convergenza, di divergenza

Esempi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x + x^2}{3x^2 + x^3} = 0$$

Determinare due polinomi tali che il limite del rapporto sia uguale ad 1

Determinare due polinomi tali che il limite del rapporto sia uguale a $+\infty$

Velocità di convergenza, di divergenza

Confronto tra potenze, esponenziali, logaritmi

se $\beta_2 > \beta_1 > 0$ allora x^{β_2} converge piu rapidamente ad infinito di x^{β_1}

$se \quad f(x) \to \infty$ più rapidamente di $g(x)$ allora

$e^{f(x)} \to \infty$ più rapidamente di $e^{g(x)}$, in particolare

se $c_2 > c_1$ allora, $e^{c_2 x}$ diverge più rapidamente di $e^{c_1 x}$

Verificare se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{2x}}{e^x + e^{3x}} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2} - e^{2x}}{e^x + e^{3x}} = +\infty$$

Velocità di convergenza, di divergenza

Confronto tra potenze, esponenziali, logaritmi

Le funzioni esponenziali di esponente positivo divergono più rapidamente di ogni potenza, cioè

$$\text{se} \quad \beta > 0 \quad \text{e se} \quad c > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{cx}}{x^{\beta}} = +\infty \quad \text{o} \quad \text{equivalentemente} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\beta}}{e^{cx}} = 0$$

La funzione logaritmo diverge più lentamente di ogni potenza, cioè

$$\text{se} \quad \beta > 0 \quad \text{e se} \quad a > 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\beta}}{\log_a x} = +\infty \quad \text{o} \quad \text{equivalentemente} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^{\beta}} = 0$$

Funzioni Continue, punti di discontinuità

Definizione. Data una funzione di variabile reale in R, e x_0 un punto del dominio (o un estremo del dominio), diciamo che la funzione **f(x) è continua in x_0 se si ha**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \Re \qquad l = f(x_0)$$

Si dice che f è continua in un intervallo se f è continua in tutti i punti di tale intervallo

Se la funzione non ammette limite (non esiste, è infinito, il limite destro è diverso dal limite sinistro) la funzione ha in x_0 un punto di discontinuità

Esempio. Verificare se le seguenti funzioni sono definite e continue in R

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 + \lg x & \text{per } x \geq 1 \\ x^2 & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

Operazione di limite e studio di funzione

Esempi. Studiare insieme di definizione e comportamento agli estremi delle seguenti funzioni.

Osservazione: calcolare i limiti utilizzando le proprietà di infinito e infinitesimo

$$f(x) = \frac{3x + x^4}{2x^2(x^2 + 1)}$$

$$g(x) = \frac{x - 1}{2(x^2 + 1)}$$

Il calcolo del limite in un punto permette di stabilire la proprietà di continuità della funzione in tale punto

Funzioni Continue, punti di discontinuità

Definizione. Data una funzione di variabile reale in R, e x_0 un punto del dominio (o un estremo del dominio), diciamo che la funzione **f(x) ha in x_0 un punto di discontinuità se si ha**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \Re \qquad l \neq f(x_0)$$

Discontinuità eliminabile

$$\lim_{x \to x_{0^+}} f(x) = l_1 \in \Re \qquad \lim_{x \to x_{0^-}} f(x) = l_2 \in \Re \qquad l_1 \neq l_2$$

Discontinuità di prima specie (a salto)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure il limite non esiste}$$

Discontinuità di seconda specie

Dire se la funzione è continua nel suo Dominio o se presenta punti di discontinuità

$$f(x) = e^{\frac{2}{1-x}}$$

Esempi di quesiti prova scritta Problema – funzioni lineari

- La percentuale dei semi, di una data pianta, che germogliano dipende dalla temperatura dell'ambiente. Per una data varietà di pomodoro è stato verificato che alla temperatura di 12°c germoglia il 40% dei semi, mentre alla temperatura di 15°c germoglia il 70% dei semi. Trovare , supponendo che sia espressa da una funzione lineare, la relazione tra la temperatura e la percentuale di semi germogliati.

- Determinata la funzione studiare, dominio, comportamento agli estremi e grafico. Individuare un intervallo di variazione della temperatura che dia senso alla rappresentazione del fenomeno.

Esempi di quesiti prova scritta
L'operazione di limite - Applicazioni

Esempi. Legge di raffreddamento

$$T(t) = T_E + (T_0 - T_E)e^{-at}$$

T(t) descrive come, al variare del tempo t, si raffredda (o si riscalda) un corpo di temperatura iniziale T_0 Immerso in un ambiente a temperatura fissata T_E , a>0

Calcolare ed interpretare il risultato del limite per $t \to \infty$

Sapendo che a = 1, T_E = 5°C, e T_0 = 20.5°C, il tempo è misurato in ore

Descrivere, disegnando il grafico, l'andamento della funzione e calcolare dopo quanto tempo la temperatura iniziale e quella dell'ambiente differiscono di 1 grado

Derivata di una funzione, significato geometrico

Data la funzione *f(x)* continua in un punto x_0 la derivata in x_0 , se esiste, è il numero

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \qquad \Delta x = x - x_0$$

Rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione (tangente alla curva) nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$

Nei punti di massimo o minimo locale la derivata prima, se esiste, è nulla. La retta tangente alla curva in questi punti è parallela all'asse x

Esempio. $f(x) = x^2$

Derivata di una potenza. $f(x) = \alpha x^{\beta}$,

$$f'(x) = (\alpha x^{\beta})' = \frac{d}{dx}(\alpha x^{\beta}) = \alpha\beta x^{\beta-1}$$

$$f'(x) = (x^2)' = 2x$$

Derivata della somma di funzioni, crescenza e decrescenza della funzione

Date due funzioni *f(x)* e g(x), derivabili in I, allora la derivata della somma è uguale alla somma delle derivate

$$(f + g)' = f' + g' \qquad \forall x \in I$$

Data la funzione *f(x)* derivabile in un intervallo I

Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f(x) è crescente nell'intervallo I

Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I$, allora f(x) è decrescente nell'intervallo I

Se f'(x) = 0 che tipo di andamento si ha; come sono tali punti ?

Esempio. Studiare il grafico $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$g(x) = x^3$

Derivate delle funzioni elementari

La funzione derivata prima associa ad ogni punto di continuità della funzione f, se esiste, il valore della derivata calcolato nel punto

f'(x) : x $\rightarrow$ f'(x)

Data la funzioni elementari, applicando la definizione si possono determinare le Seguenti funzioni derivate:

$$f'(x) = \left(e^x\right)' = \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \left(a^x\right)' = \frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$(senx)' = \frac{d}{dx}(senx) = \cos x$$

$$(\cos x)' = \frac{d}{dx}(\cos x) = -senx$$

Derivate – proprietà e regole di derivazione

Derivata del prodotto di due funzioni

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Esempio: Calcolare la derivata di

$$g(x) = e^{x}\left(x^{3} - 2x + 1\right)$$

Derivata del rapporto di due funzioni

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^{2}(x)}$$

Esempio: Calcolare la derivata di

$$f(x) = \frac{e^{x}}{x}$$

Derivata di una funzione composta

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)$$

Esempio: Calcolare la derivata di

$$f(x) = e^{2x} \qquad g(x) = e^{x^{2}}$$

Derivabilità e continuità di una funzione in un punto

Se una funzione non è continua in un punto allora non è neanche derivabile nel punto.
Esempio. Studiare dominio, comportamento agli estremi
Continuità e derivabilità. Tracciare il grafico della funzione $f(x) = -\frac{2}{x+1}$

Se una funzione è derivabile in un punto allora è continua nel punto, non è vero il viceversa .
Esempio : *f(x)* = | *x* | è continua in tutto il suo dominio $\Re$. *f(x)* = | *x* | non è derivabile in *x* = *0*

$$\lim_{x \to 0^+} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Derivata e calcolo dei limiti

Considerate due funzioni derivabili, f(x) e g(x) tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Se esiste il limite del rapporto delle derivate, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio. Calcolare il limite applicando la regola (di De L'Hospital)

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Derivata e calcolo dei limiti

Considerate due funzioni derivabili, f(x) e g(x) tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Se esiste il limite del rapporto delle derivate, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Lo stesso risultato vale se f e g divergono per $x \to x_0$

E anche nel caso di f e g entrambe divergenti o entrambe infinitesimo per $x \to \infty$

Esempio. Calcolare il limite applicando la regola (di de L'Hospital)

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

Nell'ultimo caso si ha
una verifica dell'ordine
di infinito delle due funzioni

Derivate successive
Concavità - Punti di flesso

Se la funzione derivata prima di una funzione f è derivabile in un intervallo
La sua derivata si chiama derivata seconda di f e si indica con f'' (x)
Nelle stesse condizioni si può derivare la derivata seconda,
ottenendo la derivata terza di f

Data una funzione derivabile in un intervallo : f(x) ha la concavità verso l'alto negli intervalli del dominio in cui si ha f''(x) > 0

Verso il basso negli intervalli in cui f''(x) < 0
I punti del grafico della funzione in cui cambia la concavità cambia si chiamano punti di flesso.
Esempio: studiare il grafico di $f(x) = x^3$

Nei punti di flesso la derivata seconda è nulla, la derivata prima può essere maggiore, minore o uguale a zero (flesso a tangente orizzontale)

Studio di funzione – problemi di massimo o minimo

Per studiare una funzione e determinarne il grafico, determinare:
Dominio e comportamento agli estremi
Derivata prima e punti di massimo, minimo locale
Flessi
Segno e zeri della funzione (anche come controllo sui dati raccolti e per verificare la coerenza degli elementi del grafico già determinati).

Studiare e determinare il grafico delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$N(t) = \frac{3000}{1 + e^{-2t}}$$

Legge logistica, descrive
la legge di crescita
in laboratorio
di una popolazione data
T = tempo misurato in giorni
N(t) = numerosità al variare del tempo

Derivata e problemi di massimo o minimo

Problema di ottimizzazione.

Data una lattina di forma cilindrica di altezza h, raggio di base r
costituita di lamiera di alluminio di spessore fissato in modo che la quantità totale
sia proporzionale alla superficie totale. Che proporzioni deve avere in modo
che a parità di volume la quantità di alluminio utilizzata sia minima?

Dati $V = \pi r^2 h$ $S_{tot} = 2 \pi r h + 2 \pi r^2$ da cui

$h = V/ (\pi r^2)$ $S = 2 \pi r V/ (\pi r2) + 2 \pi r^2$

Derivando S rispetto a r variabile, si ha il val minimo per S
in corrispondenza di $r = (V/ 2 \pi)^{1/3}$ che da in corrispondenza il valore di h=2r
(altezza uguale al diametro di base)

Le lezioni si concluderanno il 14 gennaio Esercitazioni – Gennaio 2014 – Date esame parziale I Modulo

- Esercitazioni

Venerdi 17 .01. 2014, 9.00-11,00 Aula C

Martedì 21.01.2014 , 9.00-11.00

Aula Magna Geologia

Venerdi 24 .01. 2014, 9.00-11,00 Aula C

Simulazione prova scritta

Modalità esame parziale

L'esame consiste in una prova scritta il cui superamento (18/30) consente anche il superamento del debito.

E' consentito ripetere lo scritto nei tre appelli previsti: gennaio- febbraio- fine maggio.

Date appelli esame parziale primo modulo: 28 gennaio ore 9.00 aula C – 18 febbraio - Il calendario definitivo (date, orario e aula) della seconda prova di febbraio sarà confermato con avviso sul sito.