Lezione 10

- Funzioni
- Definizione
- Esempi
- Grafico di una funzione

Funzioni e studio dei fenomeni

- Studiare un fenomeno vuol dire capire se esiste una relazione tra gli aspetti che lo descrivono.
- Se uno degli aspetti può essere descritto e studiato a partire dalla conoscenza degli altri, la relazione si chiama funzione.
- Il modello del fenomeno che si ottiene è una semplificazione della realtà, ma tiene conto solo delle caratteristiche fondamentali, chiamate **variabili** del fenomeno.
- E' possibile fare previsioni sull'andamento del fenomeno senza fare misure sperimentali dirette.

Funzioni e studio dei fenomeni

Esempio: crescita e sviluppo di una pianta:

- Variabili qualitative: presenza di parassiti, caratteristiche genetiche
- Variabili quantitative: luminosità, crescita. Sono fondamentali per esprimere la relazione in termini matematici.

- Passi per formulare il modello di un fenomeno naturale:

1. Individuare i fattori fondamentali che caratterizzano il fenomeno
2. Individuare le relazioni tra questi fattori
3. Quantificare le relazioni trovate

Funzioni e studio dei fenomeni

- Sia dato un fenomeno, descritto da due variabili a e b assumono valori in due insiemi A e B risp. E sia f la relazione tra queste variabili.

- Una funzione è una relazione f tra gli elementi di due insiemi, A e B, tale che: f associa a **ogni** elemento $a \in A$ **uno e un solo** elemento $b \in B$

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ a &\mapsto b \end{aligned}$$

oppure $f(a) = b$

a: **variabile indipendente**

b: **variabile dipendente**

A: **dominio**

B: **codominio**

Esempi

- I legami tra le basi azotate del DNA (A, C, G, T) sono solo tra A e T e tra C e G. Come esprimiamo questa relazione? Quali sono dominio e codominio?

$$f(A) = T; \quad f(T) = A; \quad f(C) = G; \quad f(G) = C$$

- Caduta di un corpo, la velocità del corpo varia man mano che il corpo cade, ovvero man mano che passa il tempo

$$\begin{array}{rcl} f: R & \to & R \\ t & \mapsto & v_0 + gt \end{array} \quad \text{oppure} \quad f(t) = v_0 + gt$$

$$v = f(t) \quad \text{da cui} \quad v = v_0 + gt$$

OSS: Spesso si da alla legge lo stesso nome della variabile dipendente, e si scrive $v(t) = v_0 + gt$ anzi che un generico $f(t) = v_0 + gt$

Esempio

- Misura della circonferenza sapendo il raggio

$$\begin{array}{rcl} f: R & \to & R \\ r & \mapsto & 2\pi r \end{array}$$

$f(r) = 2\pi r$ e chiamando $f(r) = C$ si ha $C = 2\pi r$

Oppure, chiamando la legge C, si ha $C(r) = 2\pi r$.

$\forall r \in R \; f(r)$ è la misura di una circonferenza?

La misura della circonferenza prende valori in tutto R?

Se $D \subseteq R$ è il dominio della funzione, allora $f(D) \subseteq R$ si chiama **Immagine** della funzione.

Funzioni

- $f(t) = v_0 + gt, \quad f(t) = v \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + gt$

Oppure $v(t) = v_0 + gt$

- $f(h) = \frac{bh}{2}, \quad f(h) = A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{bh}{2}$

Oppure $A(h) = \frac{bh}{2}$

Quali sono le variabili dipendenti e quali quelle indipendenti?

Cosa possiamo prendere come possibili Dominio e Codominio?

- Oss: v_0 e b si chiamano **parametri**.

Esempi

- Funzione lineare: $$\begin{array}{ccc} f: D \subseteq R & \rightarrow & R \\ x & \mapsto & ax + b \end{array}$$

ovvero $f(x) = ax + b$, con $a, b \in R$ (parametri)

- Funzione costante: $$\begin{array}{ccc} f: D \subseteq R & \rightarrow & R \\ x & \mapsto & a \end{array}$$

ovvero $f(x) = a$, con $a \in R$

- Funzione polinomiale: $$\begin{array}{ccc} f: D \subseteq R & \rightarrow & R \\ x & \mapsto & a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \end{array}$$

ovvero $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, con $a_0, a_1, a_2, a_3 \in R$

Determinare il dominio delle seguenti funzioni

- $f(z) = \frac{1}{z}$
- $g(t) = \sqrt{1 - t^2}$
- $s(y) = y^3 + \frac{1}{1-y}$

Grafico di una funzione

- Sia $f: D \subseteq R \to R$ una funzione, si definisce **grafico di f** il sottoinsieme del piano cartesiano

$$\{(x, f(x)) \in R^2 : x \in D\}$$

Il dominio si rappresenta sull'asse delle ascisse, il codominio sull'asse delle ordinate.

1. $g: R \to R$ definita da $g(t) = 2t + 1$
2. $f: R \to R$ definita da $f(s) = s^2$
3. $h: [-2, 2] \to R$ definita da $h(z) = z^2$
4. $p: R \to R$ definita da $p(t) = 2$

Le funzioni 2 e 3 sono uguali?