Funzioni e simmetrie

- Funzione **pari**: $f(-x) = f(x)$

  il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y

Esempi:

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = \cos x$

- Funzione **dispari**: $f(-x) = -f(x)$

  il grafico è simmetrico rispetto all'origine

Esempi:

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = \sin x$

Funzioni iniettive e funzioni suriettive

- Una funzione $f: A \to B$ si dice **iniettiva** se

$$\forall \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o equivalentemente

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Sia $f: A \to B$ una funzione e sia $Im(f)$ la sua immagine, ovvero

$$Im(f) = \{b \in B: \exists a \in A \text{ con } f(a) = b\} \subseteq B$$

Se $Im(f) = B$ la funzione si dice **suriettiva**.

Esempi

- Le seguenti funzioni sono iniettive e/o suriettive?

$$\begin{aligned} f_1 \colon R &\to R \\ a &\mapsto 3a+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 \colon (0,+\infty) &\to R \\ t &\mapsto \log t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 \colon R &\to R \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4 \colon [0,+\infty) &\to R \\ s &\mapsto s^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_5 \colon R &\to [0,+\infty) \\ y &\mapsto y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_6 \colon [0,+\infty) &\to [0,+\infty) \\ s &\mapsto s^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_7 \colon R &\to R \\ x &\mapsto 2^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_8 \colon R &\to (0,+\infty) \\ x &\mapsto 2^x \end{aligned}$$

Funzioni bigettive e funzione inversa

- Una funzione che è contemporaneamente iniettiva e suriettiva si dice **biiettiva** o **bigettiva**.
- Le funzioni bigettive sono invertibili.

Data una funzione bigettiva $f: A \to B$, si chiama funzione inversa di f e si indica con f^{-1} l'unica funzione

$$f^{-1}: B \to A$$

tale che se $f(a) = b$ allora $f^{-1}(b) = a$.

Esempio:

$f(x) = 2x + 3$ allora $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$

$f(x) = \ln x$ allora $f^{-1}(y) = e^y$

Funzioni bigettive: restrizione del dominio

- Funzioni non bigettive possono diventarlo restringendo opportunamente dominio e/o codominio.

Indicando con $R^+ = [0, +\infty)$

Non invertibili	Invertibili	Inversa
$\begin{array}{rcc} f_1\!:\!R & \to & R \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$	$\begin{array}{rcc} f_1\!:\!R^+ & \to & R^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$	$\begin{array}{rcc} f_1\!:\!R^+ & \to & R^+ \\ y & \mapsto & \sqrt{y} \end{array}$
$\begin{array}{rcc} f_2\!:\!R & \to & R \\ x & \mapsto & 2^x \end{array}$	$\begin{array}{rcc} f_2\!:\!R & \to & R^+ \\ x & \mapsto & 2^x \end{array}$	$\begin{array}{rcc} f_2\!:\!R^+ & \to & R \\ y & \mapsto & \log_2 x \end{array}$
$\begin{array}{rcc} f_3\!:\!R & \to & R \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$	$\begin{array}{rcc} f_3\!:\!\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$	$\begin{array}{rcc} f_3\!:\![-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y & \mapsto & \arcsin x \end{array}$