Lezione 17

- Problema sulle funzioni lineari
- Funzioni composte

3. Problema stile compito (1)

La percentuale dei semi di una data pianta che germogliano dipende dalla temperatura dell'ambiente. Per una data varietà di pomodoro è stato verificato che alla temperatura di $12°c$ germoglia il 40% dei semi, mentre alla temperatura di $15°c$ germoglia il 70% dei semi.

1. Trovare , supponendo che sia espressa da una **funzione lineare**, la relazione tra la temperatura e la percentuale di semi germogliati.
2. Disegnare il grafico della funzione in un opportuno intervallo di definizione.

(Funzioni lineari $p(x) = ax + b$)

Problema (1): Strategie risolutive

$$p(t) = at + b$$

$t = 12^{\circ} \Rightarrow p(t) = 40\%$dei semi

$t = 15^{\circ} \Rightarrow p(t) = 70\%$dei semi

Il problema si risolve trovando la retta che passa per i punti di coordinate $(12, 40)$ e $(15, 70)$, ci sono almeno due modi:

- Trovando la retta per i due punti

$$P(t) - 40 = \frac{70 - 40}{15 - 12}(t - 12)$$

- Si impone che i punti appartengano al grafico della funzione.

$$\begin{cases} 12a + b = 40 \\ 15a + b = 70 \end{cases}$$

Funzioni composte

- Siano $f: A \to B$ e $g: C \to D$ due funzioni, se l'immagine di f è inclusa nel dominio di g, allora si può costruire la funzione composta ($f\ composto\ g$)

$$\begin{aligned} g \circ f: A &\to D \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Quindi $g \circ f(x) = g(f(x))$. Esempio:

$$\begin{aligned} f: R &\to R \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g: R &\to R \\ x &\mapsto x+1 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} g \circ f: R &\to R \\ x &\mapsto g\big(f(x)\big) = g(x^2) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f \circ g: R &\to R \\ x &\mapsto f\big(g(x)\big) = f(x+1) = (x+1)^2 \end{aligned}$$

Esempi di funzioni composte

Costruire $f \circ g$ e $g \circ$ f per le seguenti coppie di funzioni:

- $\begin{array}{cccc} f: R & \rightarrow & R \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{ccc} g: R & \rightarrow & R \\ x & \mapsto & 2^x \end{array}$

$f \circ g(x) = f(2^x) = 2 \cdot 2^x + 1$

$g \circ f(x) = g(2x+1) = 2^{2x+1}$

- $\begin{array}{ccc} f: R & \rightarrow & R \\ x & \mapsto & x+2 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{ccc} g: R \setminus \{0\} & \rightarrow & R \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$

$f \circ g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + 2$ con dominio $R \setminus \{0\}$

$g \circ f(x)$ non si può fare perché $Im(f) \nsubseteq Dom(g)$.

Lezione 18

- Funzioni composte e funzioni invertibili
- Funzioni crescenti e decrescenti
- Massimi e minimi assoluti
- Funzioni limitate

Funzioni composte e funzioni inverse

- Sia $f: A \to B$ una funzione. La funzione $f(x)$ è invertibile e $f^{-1}: B \to A$ è la sua inversa se si ha

$$f \circ f^{-1} = Id_B \text{ e } f^{-1} \circ f = Id_A,$$

$Id(x) = x$ è la funzione identità che associa ad ogni elemento, l'elemento stesso.

Esercizio.

- Dire se le funzioni sono invertibili, trovare l'inversa e verificare che la loro composizione è la funzione identità.

$$\begin{array}{ccc} g: R & \to & R \\ x & \mapsto & x-5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f: R & \to & R^+ \\ x & \mapsto & 2^x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g: R^+ & \to & R^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Funzioni crescenti e decrescenti

Data una funzione $f(x)$ definita in un dominio D

- $f(x)$ è **crescente** nell'intervallo $I \subseteq D$ se
$$\forall x_1, x_2 \in I: \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
- $f(x)$ è **strettamente crescente** nell'intervallo $I \subseteq D$ se
$$\forall x_1, x_2 \in I: \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
- $f(x)$ è **decrescente** nell'intervallo $I \subseteq D$ se
$$\forall x_1, x_2 \in I: \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$
- $f(x)$ è **strettamente decrescente** nell'intervallo $I \subseteq D$ se
$$\forall x_1, x_2 \in I: \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Esempi:

$f(x) = x^2$ $\qquad$ $f(x) = 0{,}5^x - 1$ $\qquad$ $f(x) = \tan x$ $\qquad$ $f(x) = \sin x$

Oss: Una funzione strettamente crescente o strettamente decrescente è invertibile.

Massimi e minimi assoluti

Sia $f(x)$ una funzione definita in $D \subseteq R$ e $x_0 \in D$:

- Il valore $\max f \; = f(x_0)$ è detto **massimo assoluto** di f(x) se
$$\forall x \in D \qquad f(x_0) \geq f(x)$$
- Il valore $\min f \; = f(x_0)$ è detto **minimo assoluto** di f(x) se
$$\forall x \in D \qquad f(x_0) \leq f(x)$$

Esempi:

- $f(x) = -(x+1)^2 + 2$ ha massimo assoluto uguale a 2 (che è il valore assunto per $x = -1$). Non ha minimo assoluto.
- $f(x) = x + 1$ con $x \in D = [-2,5]$ ha massimo assoluto uguale a 6 (valore assunto per $x = 5$) e minimo assoluto uguale a -1 (valore assunto per $x = -2$).

Funzioni limitate

- Una funzione $f(x)$ è limitata in tutto il suo dominio D se la sua immagine è un insieme limitato (può essere sia aperto che chiuso), sottoinsieme proprio di R.
  - Massimo e minimo assoluti $\in R$
  - Estremo superiore e inferiore $\in R$
- Una funzione $f(x)$ è limitata superiormente (inferiormente) in tutto il suo dominio D se la sua immagine è un insieme limitato superiormente (inferiormente), sottoinsieme proprio di R.
  - Massimo (minimo) assoluto $\in R$
  - Estremo superiore (inferiore) $\in R$

Esempi

Esempi:

- $f(x) = (x+1)^2$ è limitata solo inferiormente

  $Im(f) = [0, +\infty)$, $\quad \min f = 0$, $\quad \sup f = +\infty$
- $f(x) = 5^x - 1$ è limitata solo inferiormente

  $Im(g) = (-1, +\infty)$, $\quad \inf f = -1$, $\quad \sup f = +\infty$
- $f(x) = (x+1)^2$ con $x \in (-5, 5]$ è limitata

  $Im(f) = [0, 36]$, $\quad \min f = 0$, $\quad \max f = 36$
- $f(x) = 5^x - 1$ con $x \in [0, 2)$ è limitata

  $Im(g) = [0, 24)$, $\quad \min f = -1$, $\quad \sup f = 24$

Esercizi sulle funzioni limitate

Trovare massimi e minimi assoluti, estremo inferiore e superiore delle seguenti funzioni e dire se sono limitate inferiormente e/o superiormente:

- $g(x) = -(x+1)^2 + 2$
- $h(x) = x^2 + 1$
- $f(t) = t^2$ con $t \in [-2,3]$
- $f(x) = 5^x$
- $g(t) = t^2$ con $t \in [-2,3)$