Lezione 22. 21-12-2015

- Derivata di funzioni composte
- Legame della derivata prima con le funzioni crescenti e decrescenti, massimi e minimi relativi e flessi a tangente orizzontale.
- Regola di De l'Hospital

Derivata di funzioni composte

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = \Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Es:

$$\frac{d}{dx} \big(f(x)\big)^{\alpha} = \Big(\big(f(x)\big)^{\alpha}\Big)' = \alpha \big(f(x)\big)^{\alpha-1} f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = \Big(e^{f(x)}\Big)' = e^{f(x)}\, f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos\big(f(x)\big) = \big(\cos\big(f(x)\big)\big)' = -\sin\big(f(x)\big)\, f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \sin\big(f(x)\big) = \big(\sin\big(f(x)\big)\big)' = \cos\big(f(x)\big)\, f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \ln\big(f(x)\big) = \big(\ln\big(f(x)\big)\big)' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

Esempi

- $f(x) = e^{x^2} \Rightarrow \quad f'(x) = e^{x^2} 2x$
- $f(x) = e^{x^3+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{x^3+1}(3x^2)$
- $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x} = (x^3 - 2x)^{\frac{1}{2}}$

  $\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 2x)^{\frac{1}{2}-1}(3x^2 - 2)$
- $f(x) = \cos(x^3 - 2x)$

  $\Rightarrow \quad f'(x) = -\sin\,(x^3 - 2x)(3x^2 - 2)$

Segno della derivata prima

Data una funzione $f(x)$ derivabile in un intervallo I, allora

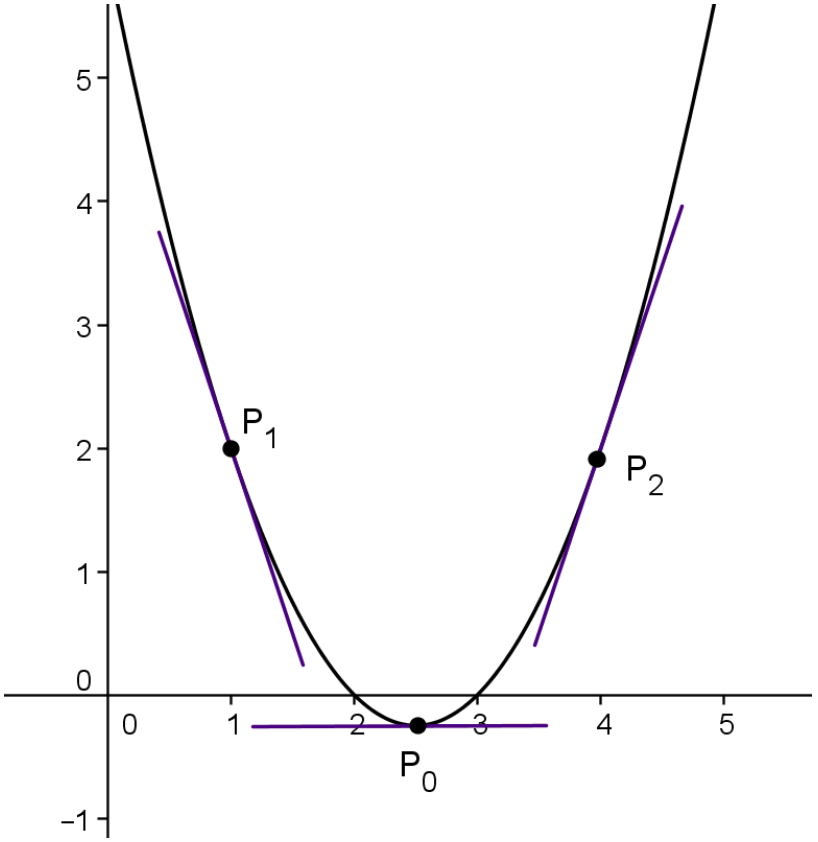
- se $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$ allora la funzione $f(x)$ è crescente in I
- se $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$ allora la funzione $f(x)$ è decrescente in I

Se $f'(x) = 0$, che andamento ha la funzione in tale punto?

Cosa vuol dire geometricamente? (Ripensare al significato geometrico della derivata in un punto)

Esempio 1

- $f(x) = x^2 - 5x + 6$
- $f'(x) = 2x - 5$
- $f'(x) = 2x - 5 \geq 0$
- $x > \frac{5}{2} \Rightarrow f(x)$ è crescente
- $x < \frac{5}{2} \Rightarrow f(x)$ è decrescente
- $x = \frac{5}{2} \Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right)$ è un minimo locale



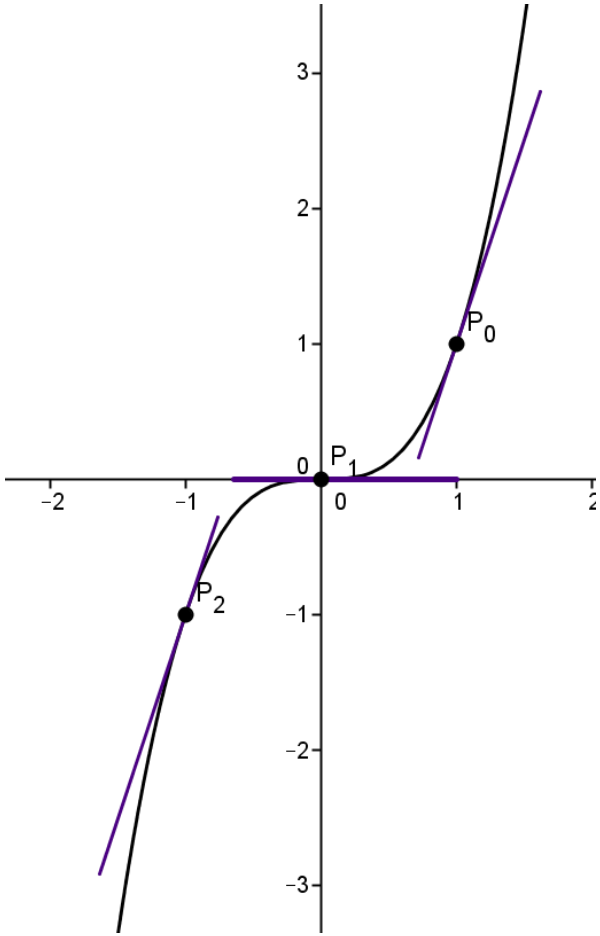
Esempio 2

- $f(x) = x^3$
- $f'(x) = 3x^2$
- $f'(x) = 3x^2 \geq 0 \quad \forall x \in R$
- $f'(x) = 0$ per $x = 0$

$\Rightarrow f(x)$ sempre crescente

$\Rightarrow f(0)$ non è né massimo né minimo locale

È un flesso a tangente orizzontale



Riepilogando

- Nei punti di massimo o minimo locale la derivata prima, se esiste, è nulla.
- La retta tangente alla curva in questi punti è parallela all'asse x.
- Se la derivata prima è nulla in x_0 non vuol dire che in x_0 ci sia un massimo o un minimo locale!

Derivabilità e continuità di una funzione in un punto

- Se una funzione non è continua in un punto, allora non è neanche derivabile nel punto.

Esempio. Studiare dominio, comportamento agli estremi, continuità e derivabilità della funzione $f(x) = -\frac{2}{x-1}$ e tracciarne il grafico.

- Se una funzione è derivabile in un punto allora è anche continua in quel punto. Non è vero il viceversa!!! (Cioè?)

Derivabilità e continuità di una funzione in un punto

- Esempio. $f(x) = |x|$ è continua ma non è derivabile.

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

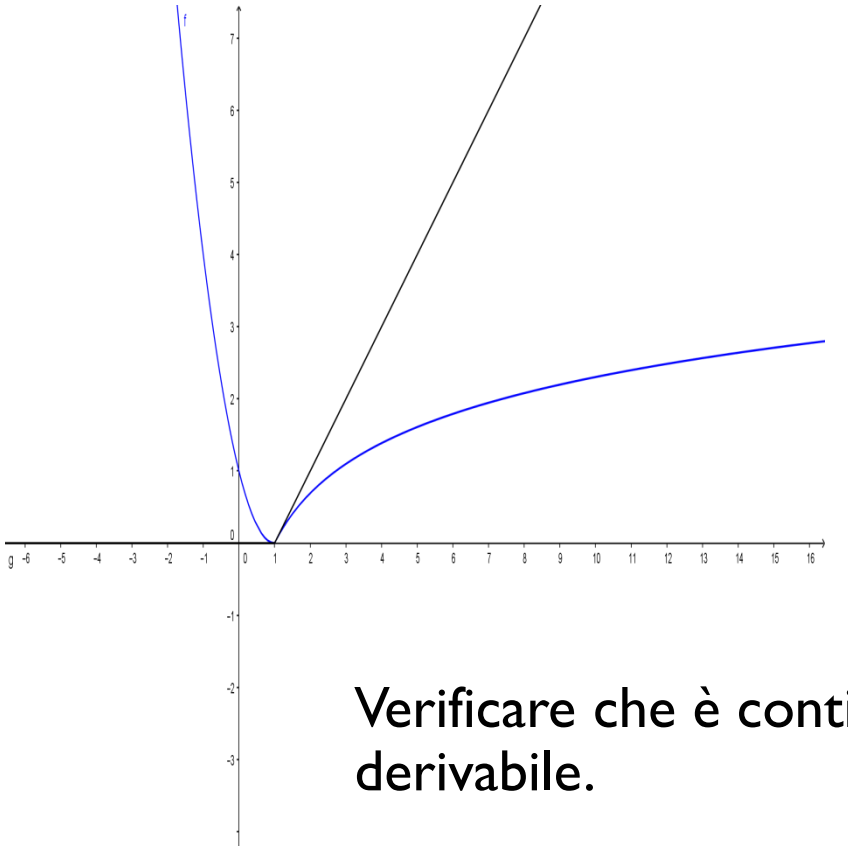
se questo limite esiste ed è finito. Ma

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 \quad \text{mentre} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$$

Poiché i due limiti sono diversi, il limite del rapporto incrementale per $x \to 0$ non esiste, e questo vuol dire che non esiste la derivata in $x = 0$. Negli altri punti ($\neq 0$) qual è la retta tangente?

Altro esempio di funzione continua non derivabile

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & se \quad x \geq 1 \\ (x-1)^2 & se \quad x < 1 \end{cases}$$



Verificare che è continua ma non è derivabile.

Derivata e calcolo di limiti. Regola di De l'Hospital

- Considerate due funzioni derivabili, $f(x)$ e $g(x)$ tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

oppure tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

se esiste il limite del rapporto delle derivate, cioè se esiste

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regola di De l'Hospital si usa per risolvere le forme indeterminate $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ oppure $\frac{0}{0}$.

Esempi. Risoluzione di limiti usando la regola di De l'Hospital.

- $\lim_{x\to 1} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$ applicando De l'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{0}{0}$ applicando De l'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

Esempi. Risoluzione di limiti usando la regola di De l'Hospital.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-1} = \frac{+\infty}{+\infty}$ applicando De l'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Applicando nuovamente De l'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Osservazione importante.

- Dovete usare la regola di De l'Hospital solo nel caso in cui non possiate lavorare in un altro modo. Per esempio non voglio che lo usiate per risolvere limiti di rapporti di polinomi. Perché avete a disposizione il raccoglimento.
- Dopo le vacanze parleremo delle **velocità di divergenza** e vedrete che spesso non sarà necessario usare De l'Hospital.