Lezione 23 11-1-2016

- Derivata seconda
- Flessi e concavità
- Studi di funzione

Derivata seconda

- Sia data una funzione $f(x)$. Se la sua funzione derivata prima $f'(x)$ è derivabile in un intervallo, la sua derivata si chiama **derivata seconda** di $f(x)$ e si indica con $f''(x)$. Nelle stesse condizioni si può derivare la derivata seconda, ottenendo la derivata terza di $f(x)$.

- Data una funzione $f(x)$ derivabile in un intervallo:
  - ha la concavità verso l'alto negli intervalli del dominio in cui si ha $f''(x) > 0$
  - ha la concavità verso il basso negli intervalli del dominio in cui si ha $f''(x) < 0$
  - i punti del grafico della funzione in cui cambia la concavità si chiamano punti di flesso. In tali punti $f''(x) = 0$

Esempio: $f(x) = x^3$

$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f''(x) = 6x$

- $f'(x) = 3x^2 \geq 0 \quad \forall x \in R$

⇒ sempre crescente, in $x = 0$ la tangente è orizzontale

ma non è né massimo né minimo locale.

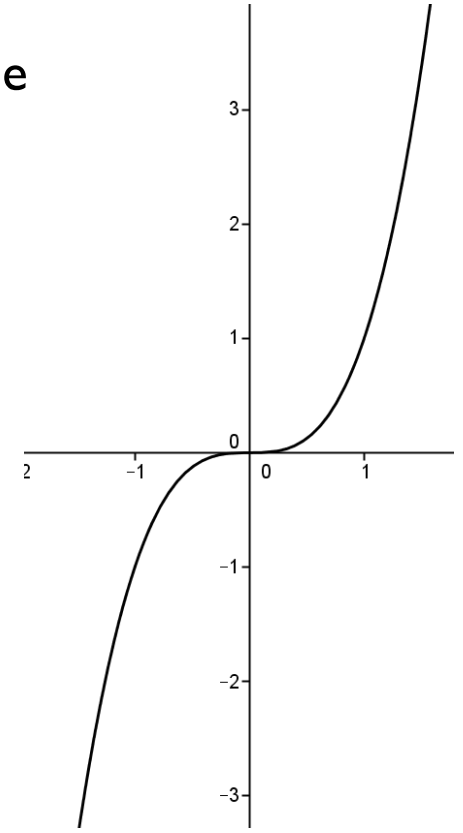
- $f''(x) = 6x \geq 0$ per $x \geq 0$
- $f''(x) > 0$ per $x > 0$

⇒ concavità verso l'alto

- $f''(x) < 0$ per $x < 0$

⇒ concavità verso il basso

- $(0, f(0))$ è un flesso a tangente orizzontale

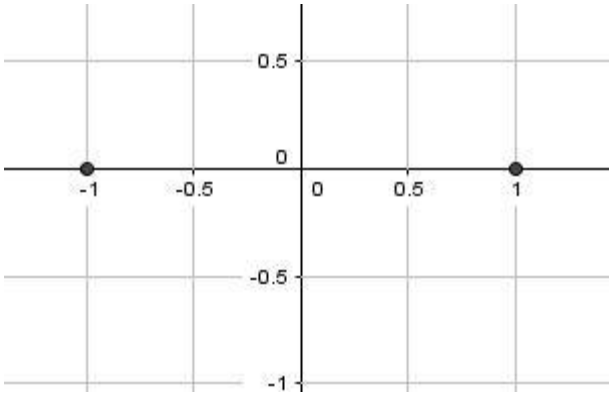


Esercizio 1

Disegnare il grafico di $f(s) = s\sqrt{1-s^2}$, dire se è pari o dispari e se è continua nel suo dominio.

- $D = \{s \in R: 1 - s^2 \geq 0\} = \{s \in R: -1 \leq s \leq 1\} = [-1,1]$
- $f(-s) = -s\sqrt{1-(-s)^2} = -\left(s\sqrt{1-s^2}\right) = -f(s)$ è dispari

$$\lim_{s \to -1} s\sqrt{1-s^2} = 0 \qquad \lim_{s \to 1} s\sqrt{1-s^2} = 0$$



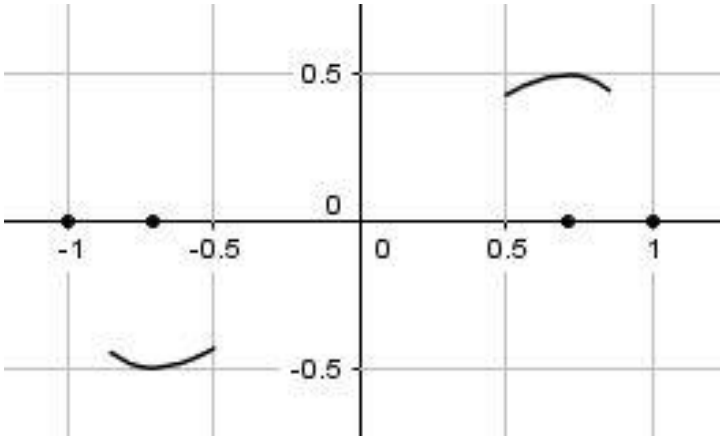
Esercizio 1

- $f'(s) = 1 \cdot \sqrt{1-s^2} + s \cdot \frac{1}{2}(1-s^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2s) = \frac{1-2s^2}{\sqrt{1-s^2}}$

$f'(s) \geq 0$ per $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq s \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ quindi è

decrescente in $\left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$

crescente in $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



$P = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ è un minimo locale

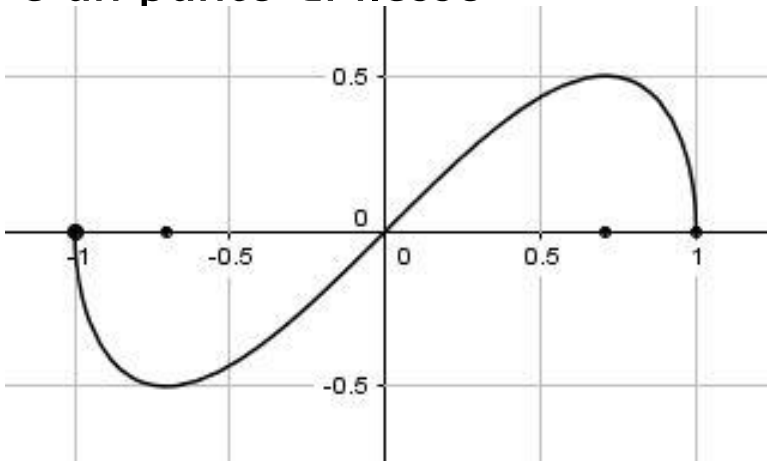
$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ è un massimo locale

Esercizio 1.

- $f''(s) = \frac{(1-2s^2)'\sqrt{1-s^2}-(1-2s^2)(\sqrt{1-s^2})'}{(\sqrt{1-s^2})^2} =$

  $\frac{-4s\sqrt{1-s^2}-(1-2s^2)\frac{1}{2}(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}(-2s)}{1-s^2} = \frac{-3s+2s^3}{(1-s^2)\sqrt{1-s^2}} \geq 0$

- $f''(s) > 0$ in $[-1,0)$ e qui la concavità è verso l'alto
- $f''(s) < 0$ in $(0,1]$ e qui la concavità è verso il basso
- $P = (0, f(0)) = (0,0)$ è un punto di flesso



Esercizio 2.

Disegnare il grafico di $N(t) = t^2 \ln t$.

- $D = \{t \in R : t > 0\} = (0, +\infty)$
- $\lim_{t \to 0^+} t^2 \ln t = 0 \cdot (-\infty)$ forma indeterminata

Deve essere trasformata in una F.I. del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$$\lim_{t \to 0^+} t^2 \ln t = \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t^2}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$ usiamo de l'Hospital

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\ln t}{t^{-2}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-2t^{-3}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{2}{t^3}} = \lim_{t \to 0^+} -\frac{t^3}{2t} = 0$$

- $\lim_{t \to +\infty} t^2 \ln t = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$
- Esercizio: verificare che non ci sono asintoti obliqui.

Esercizio 2

- $f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1) \geq 0$

$f'(x) < 0$ in $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ed è quindi decrescente

$f'(x) > 0$ in $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ ed è quindi crescente

$P = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$ è un minimo locale

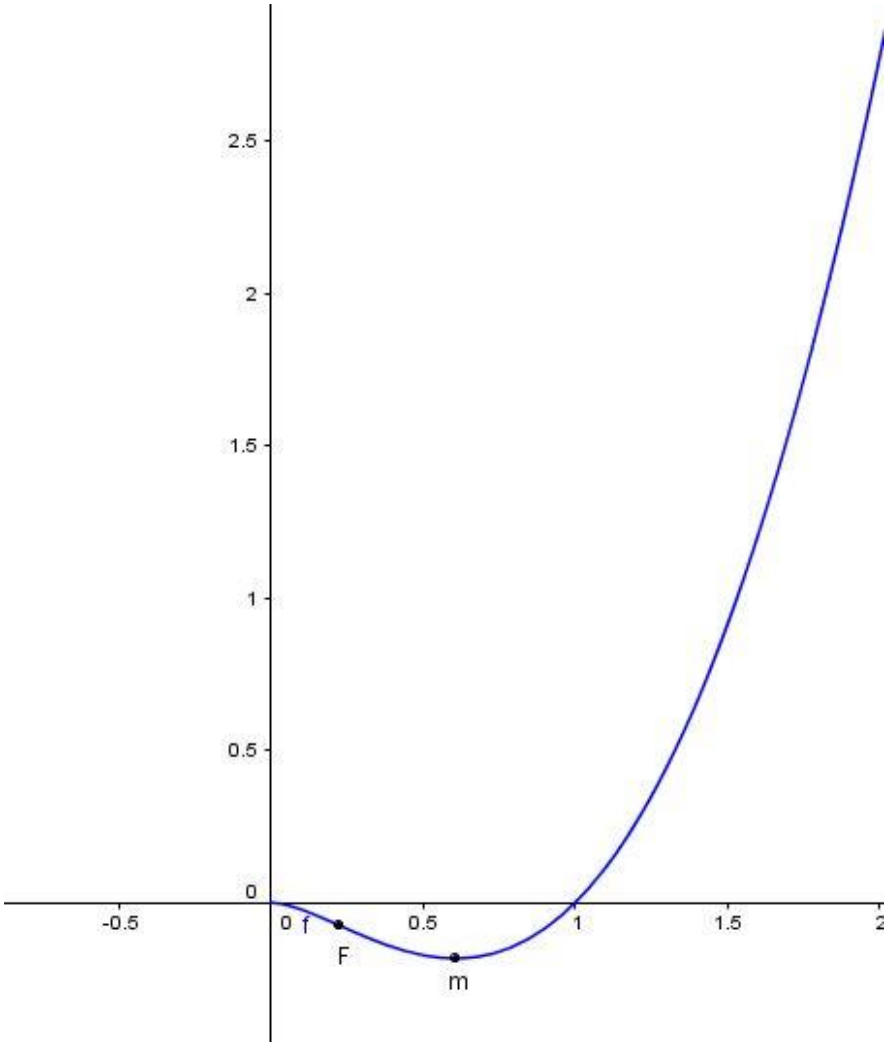
- $f''(x) = 2 \ln x + 1 + x \cdot 2\frac{1}{x} = 2 \ln x + 3 \geq 0$

$f''(x) < 0$ in $\left(0, \frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$ ed ha la concavità verso il basso

$f''(x) > 0$ in $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, +\infty\right)$ ed ha la concavità verso l'alto

$P = \left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, f\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)\right) = \left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$ è un punto di flesso

Esercizio 2



Esercizio 3.

La risposta di un neurone artificiale a uno stimolo è una funzione a gradino $\theta(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \leq 0 \\ 1 & se\ x > 0 \end{cases}$

e per questo motivo spesso si preferisce usare la legge $f(x) = \frac{1}{1+e^{-\alpha x}}$ con $\alpha > 0$.

Studiare il limite delle due funzioni per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.
Rappresentare poi le due leggi graficamente considerando $\alpha = 2$.
Sono funzioni limitate?

Esercizio 3.

- $D = R$

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 + e^{-2x}} = 0$ $\quad$ y = 0 asintoto orizzontale

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + e^{-2x}} = 1$ $\quad$ $y = 1$ asintoto orizzontale

Scrivendo $f(x) = (1 + e^{-2x})^{-1} \Rightarrow$

- $f'(x) = 2e^{-2x}(1 + e^{-2x})^{-2} = \frac{2e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2} \geq 0 \quad \forall x \in R$

e quindi è sempre crescente.

Esercizio 3.

$f'(x) = 2e^{-2x}(1 + e^{-2x})^{-2}$

- $f''(x) = (2e^{-2x})' \ (1 + e^{-2x})^{-2} + 2e^{-2x}\left((1 + e^{-2x})^{-2}\right)' =$

$$= \frac{-4e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2} + \frac{8(e^{-2x})^2}{(1 + e^{-2x})^3} = \frac{4e^{-2x}(-1 + e^{-2x})}{(1 + e^{-2x})^3} \geq 0$$

da cui $f''(x) \geq 0$ quando $-1 + e^{-2x} \geq 0$, ovvero quando $-2x \geq 0$ e perciò quando $x \leq 0$.

Quindi, per $x \in (-\infty, 0)$ la concavità è verso l'alto $(f''(x) > 0)$

Mentre per $x \in (0, +\infty)$ la concavità è verso il basso $(f''(x) < 0)$

- $P = \big(0, f(0)\big)$ è un punto di flesso.

Lezione 24 13-1-2016

- Velocità di divergenza e di convergenza
- Limiti

Velocità di divergenza

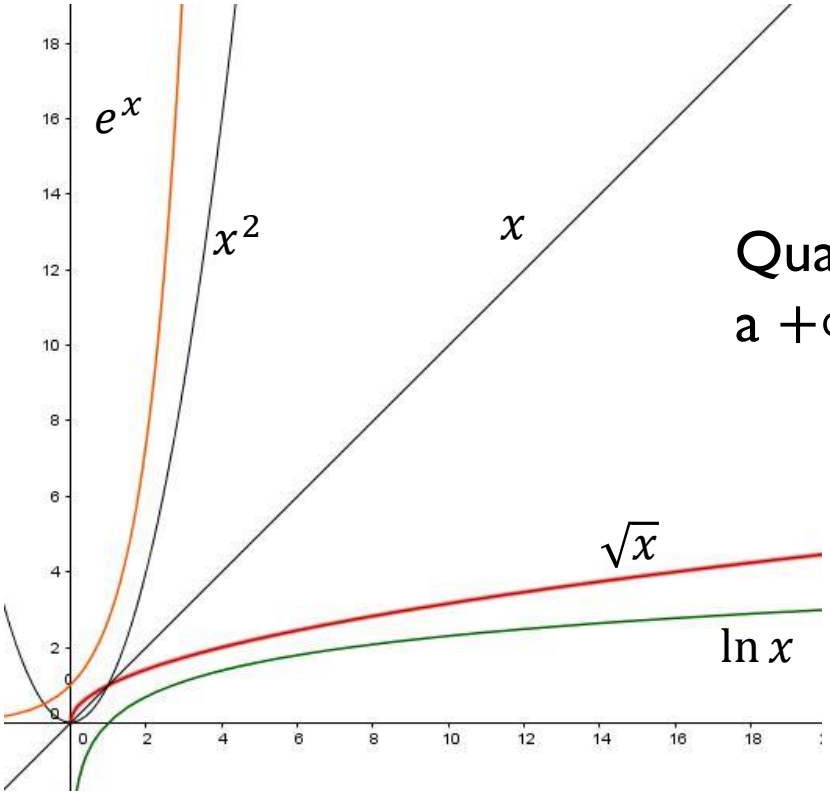
- Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni che per $x \to \pm\infty$ divergono a $+\infty$ o $-\infty$. Allora il rapporto dei loro limiti può essere

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ — $f(x)$ diverge più velocemente di $g(x)$ (f è un infinito di ordine superiore)
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ — $f(x)$ diverge più lentamente di $g(x)$ (f è un infinito di ordine inferiore)
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ — f(x) e $g(x)$ divergono con la stessa velocità (f e g sono infiniti dello stesso ordine)
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ — f(x) e $g(x)$ divergono asintoticamente a $+\infty$

Esempi

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{5}x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{5}x^3} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{5}x^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{e^{2x}} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{2x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{5\sqrt{x}}{\ln(2x)} = +\infty$$



Quale tra queste funzioni diverge a $+\infty$ più velocemente?

Esempio e osservazione

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3}{-\sqrt[3]{4}x^2}$$

le velocità di divergenza ci dicono che il numeratore va a infinito più velocemente del denominatore e quindi il limite dell'intera frazione va a infinito. Per capire il segno di questo infinito ($\pm\infty$) dobbiamo considerare il denominatore, ovvero:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3}{-\sqrt[3]{4}x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{-\sqrt[3]{4}} = \frac{-\infty}{-\sqrt[3]{4}} = +\infty$$

Confronto tra esponenziali, potenze e logaritmi

- Se $\beta_1 > \beta_2$ allora $x^{\beta_1} \to +\infty$ più rapidamente di x^{β_2}

Oss: per le funzioni potenza x^{β}, vale anche per $x \to -\infty$.

- Se $f(x) \to +\infty$ più rapidamente di $g(x)$, allora $e^{f(x)} \to +\infty$ più rapidamente di $\mathrm{e}^{g(x)}$.
- In particolare, se $\beta_1 > \beta_2$, allora $e^{\beta_1 x} \to +\infty$ più rapidamente di $\mathrm{e}^{\beta_2 x}$.

Questo fatto si usa anche nelle somme e sottrazioni di infiniti.

Esempio 1:

$$\lim_{x\to+\infty} -3x^2 + \sqrt{3}\,x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(-3 + \frac{\sqrt{3}x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= +\infty(-3+0) = -\infty$$

sta dominando la crescita ad infinito il termine di secondo grado.

Confronto tra esponenziali, potenze e logaritmi

Esempio 2:

$$\lim_{x\to+\infty} -e^{3x} + \sqrt{3}\, e^{x^2} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2}\left(-\frac{e^{3x}}{e^{x^2}} + \sqrt{3}\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2}\left(-e^{3x-x^2} + \sqrt{3}\right) =$$

$$+\infty\left(-e^{+\infty-\infty} + \sqrt{3}\right)$$

Per capire cosa accade a $-e^{3x-x^2}$ dobbiamo analizzare l'esponente. Poiché $3x - x^2 \to -\infty$ quando $x \to +\infty$ (domina il termine di grado maggiore), allora

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2}\left(-e^{3x-x^2} + \sqrt{3}\right) = +\infty\left(-e^{-\infty} + \sqrt{3}\right) = +\infty\left(0 + \sqrt{3}\right)$$

$$= +\infty$$

Confronto tra esponenziali, potenze e logaritmi

Altri esempi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{2x}}{e^x + e^{3x}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2} - e^{2x}}{e^x + e^{3x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5x} - x + 2}{\sqrt{x + 23}} = -\infty$$

Confronto tra esponenziali, potenze e logaritmi

- Le funzioni esponenziali con esponente positivo divergono più velocemente di ogni potenza:

$\forall \alpha > 0$ e $\forall \beta > 0$, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} = +\infty$$

- Le funzioni potenza con esponente positivo divergono più velocemente di ogni funzione logaritmica con base $a > 1$:

$\forall a > 1$ e $\forall \beta > 0$, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^{\beta}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\beta}}{e^{\alpha x}} = ? \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\beta}}{\log_a x} = ?$$

Confronto tra esponenziali, potenze e logaritmi

Altri esempi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - x^2}{e^x + 5x^5 - x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2} - 2\sqrt{x}}{3x + e^{3x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5x} - x}{\ln(4x)} = -\infty$$

Infinitesimi

Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ allora si dice che $f(x)$ è un infinitesimo.

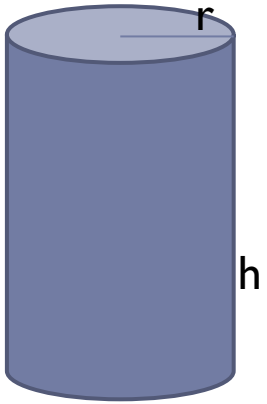
- Siano $f(x)$ e $g(x)$ due infinitesimi. Allora il rapporto dei loro limiti può essere

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ — $f(x)$ tende a zero più lentamente di $g(x)$ (f è un infinitesimo di ordine inferiore)
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ — $f(x)$ tende a zero più velocemente di $g(x)$ (f è un infinitesimo di ordine superiore)
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ — f(x) e $g(x)$ tendono a zero con la stessa velocità (f e g sono infinitesimi dello stesso ordine)

Esercizio di ottimizzazione (solo da leggere)

Data una lattina di forma cilindrica di altezza h, raggio di base r costituita di lamiera di alluminio di spessore fissato in modo che la quantità totale sia proporzionale alla superficie totale. Che proporzioni deve avere in modo che a **parità di volume** la **quantità di alluminio utilizzata sia minima**?

$V = \pi r^2 h$ $\quad$ $S_{tot} = 2\pi rh + 2\pi r^2$



Problema: S_{tot} dipende da due variabili r, h

$V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2}$ e sostituiamo in S_{tot}

$S_{tot} = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = 2Vr^{-1} + 2\pi r^2$

$S'_{tot} = -2\mathrm{V}\mathrm{r}^{-2} + 4\pi r \geq 0$

il cui minimo si ottiene per $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ e quindi $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \quad 2r$

Problemi

- Due popolazioni in un habitat si evolvono seguendo rispettivamente leggi $N_1(t) = \frac{1000}{100-90e^{-\frac{t}{5}}}$ e $N_2(t) = \frac{50}{5+5e^{-\frac{t}{4}}}$. Rappresentare graficamente l'evoluzione delle due popolazioni. Raggiungono in qualche istante lo stesso numero di individui?
- Una popolazione si evolve seguendo la legge

$$P(t) = \frac{AP_0}{P_0+(A-P_0)e^{-\beta t}}$$

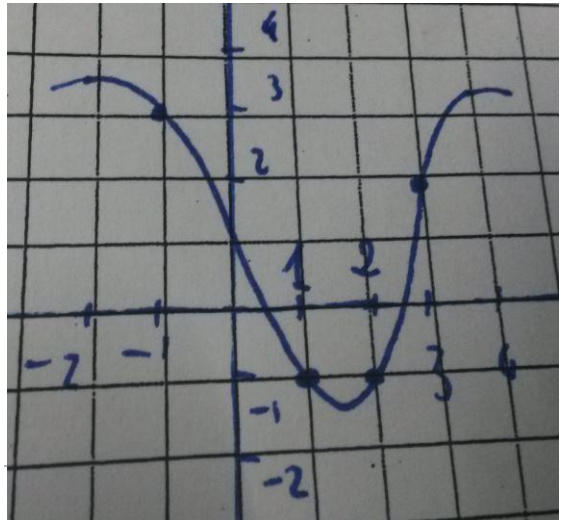
dove il tempo è misurato in anni e i parametri A, P_0, β sono parametri positivi. Se si permette al tempo di crescere illimitatamente, cosa accade alla popolazione col passare degli anni? Quanti individui costituiscono la popolazione iniziale? Cosa rappresentano quindi i parametri A e P_0?

Si consideri poi $A = 20, P_0 = 100, \beta = 2$, la popolazione supererà mai i 150 esemplari? Dopo quanto tempo la popolazione sarà inferiore a 40 esemplari?

Problemi

- E' stato osservato in una serra che la percentuale di piantine germogliate dopo 2 giorni è del 20%, dopo 4 giorni è del 25%, dopo 5 giorni è del 40%. La relazione tra i giorni e la percentuale di piantine germogliate è lineare? Se non lo è e supponiamo che sia una relazione quadratica del tipo $y = ax^2 + bx + c$, quale sarà la percentuale di piantine germogliate dopo 6 giorni?

- Il disegno rappresenta il grafico di una funzione $f: [-2,4) \to R$ (ogni quadretto ha lato di misura 1). Quanto vale $\frac{f(f(f(2)))}{f(3)}$?



Problema complesso

Nell'ambito di uno studio epidemiologico riguardante la diffusione di una patologia influenzale in presenza di determinate strategie di prevenzione e cura, alcuni ricercatori hanno elaborato un semplice modello matematico per esprimere l'andamento temporale del numero di persone infette in un dato campione.
Indicato con t il tempo trascorso, in giorni, dall'inizio della diffusione della patologia nel campione, secondo il modello il numero $n(t)$ di persone infette al giorno t è espresso da una funzione del tipo:

$n(t) = \dfrac{ae^t}{(b+e^t)^2}$, con a e b costanti reali positive e t variabile reale positiva.

a) Dimostra che, comunque si scelgono le costanti a e b, il modello prevede l'estinzione della patologia nel campione.

b) Dimostra che, se $b>1$, vi è comunque un picco di massima diffusione in un momento $\overline{t}$ e che il numero di malati è nuovamente quello iniziale per $t = 2\overline{t}$.

c) Sempre con $b>1$, supponi che il numero iniziale di malati sia $n_0 = 16$ e che il numero massimo di malati si verifichi per $\overline{t} = 2\ln 2$. Dimostra che i valori delle costanti sono allora $a = 400$ e $b = 4$, quindi rappresenta la funzione $n(t)$ così ottenuta per $t \geq 0$, tralasciando lo studio della derivata seconda.