Programma (orientativo) secondo semestre 32 ore - 16 lezioni

- 3 lezioni: successioni e serie
- 4 lezioni: integrali
- 2-3 lezioni: equazioni differenziali
- 4 lezioni: sistemi di equazioni e calcolo vettoriale e matriciale
- 2-3 lezioni: statistica

Lezione 1

- Successioni: definizione e comportamento asintotico

Successioni. Definizione

Una successione di numeri reali è una lista infinita e ordinata di numeri reali $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$.

chiamati **termini** della successione.

Una successione è una funzione che associa ad ogni numero naturale un numero reale

$$\begin{array}{cccc} s: & N & \rightarrow & R \\ & n & \mapsto & s_n \end{array}$$

cioè $s(n) = s_n$.

La successione si può rappresentare anche così: $(s_n)_{n \in N}$

Esempio:

$s(n) = 2n$ $\qquad 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots$ $\qquad (2n)_{n \in N}$

$s(n) = \frac{1}{2n+1}$ $\qquad \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{2n+1}, \dots$ $\qquad \left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n \in N}$

Sommatorie

$$\sum_{n=1}^{4} n = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\sum_{k=2}^{5} k = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

$$\sum_{k=1}^{4} (3k + 2) = (3 + 2) + (6 + 2) + (9 + 2) + (12 + 2)$$

Calcolare:

$$\sum_{k=3}^{5} 2(2k - 1) =?$$

Esercizi

Scrivere i primi 3 termini della successione $s_n = \frac{4n}{n+1}$.

Scrivere il terzo e il quinto termine della successione $a_n = (2n-2)^3$.

Calcolare la somma dei primi 9 numeri naturali.

Calcolare

$$\sum_{n=3}^{6} \frac{n+3}{n}$$

$$\sum_{k=2}^{4} (2+k)^2$$

Successioni e comportamento asintotico

Considerando le successioni come funzioni da N in R, qual è il comportamento asintotico della successione ($n \to \infty$)?

Si può determinare tale comportamento per $n \to \pm\infty$? No, solo per $n \to +\infty$

Oss: valgono tutte le proprietà dell'operazione di limite viste nel caso generale delle funzioni di variabile reale (eccetto quelle che necessitano della continuità della funzione come ipotesi. Perché?)

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \begin{cases} l \in R & \text{convergente} \\ \pm\infty & \text{divergente} \\ \nexists & \text{indeterminata} \end{cases}$$

Esempi e esercizi sul comportamento asintotico

Esempi. Scrivere per esteso i primi 4 termini delle seguenti successioni e studiarne il comportamento asintotico

$$s(n) = \frac{1}{3n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n} = 0 \qquad s(n) = n \qquad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$$s(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad s(n) = (5)^n \qquad \lim_{n\to+\infty} (5)^n = ?$$

$$s_n = \frac{4n}{n+1} \qquad \mathrm{s(n)} = (2n-2)^3 \qquad \mathrm{s_n} = \frac{n+3}{n} \qquad \mathrm{s_k} = (2+k)^2$$

Successioni e comportamento asintotico

Scrivere i primi 6 termini delle seguenti successioni e studiare il loro comportamento asintotico:

$$s(n) = \begin{cases} n & \text{per n pari} \\ \dfrac{1}{n} & \text{per n dispari} \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} s(n) = \begin{cases} +\infty & \text{per n pari} \\ 0 & \text{per n dispari} \end{cases}$$

$$s(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{per n pari} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{per n dispari} \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} s(n) = \begin{cases} 0 & \text{per n pari} \\ 0 & \text{per n dispari} \end{cases}$$

Il limite vale 0

La successione $s(n)$ è convergente se esiste finito il limite delle due sotto successioni $s(2n)$ e $s(2n + 1)$ e tali limiti coincidono.

Somma ennesima o ridotta ennesima

Data una successione $s(n) = s_n$, si chiama **ridotta ennesima** o **somma ennesima** S_n la somma dei primi n termini della successione:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} s_k$$

- La somma dei primi n numeri naturali è

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione: Scrivendo per esteso i termini da 1 a n e da n a 1 e sommando si ottiene

$$\begin{array}{c} 1 + \ 2 \ + 3 + \ \ 4 \ \ + \cdots + (n-1) + n \\ n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \end{array}$$

La somma ennesima è $\quad S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Lezione 2

- Serie: definizione
- Serie geometrica

Ridotta ennesima e Serie

Determinando il limite della successione S_n per $n \to +\infty$ si determina l'esistenza della somma infinita

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} s_k = \sum_{k=1}^{+\infty} s_k$$

Esempio:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$$

la somma non è finita.

Si dice che la **serie diverge**.

Serie

Data la successione di termine generico S_n, ovvero $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$
la successione delle somme parziali

$S_1 = s_1, \;\; S_2 = s_1 + s_2, \;\; S_3 = s_1 + s_2 + s_3, \;\; \dots, \;\; S_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$

prende il nome di **serie**.

Se, per $n \to +\infty$ il limite della successione delle somme parziali

- esiste finito, si dice che la **serie converge** e ha somma finita

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \alpha \in R \quad \text{cioè} \quad \alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n$$

- esiste ed è infinito $(+\infty, -\infty, \infty)$, si dice che la **serie diverge**

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n = \infty$$

- non esiste, si dice che la **serie** è **indeterminata**.

Leggendo su internet…

C'è un gruppo infinito di matematici che entra in un bar. Il primo chiede al barista 1L di birra, il secondo $1/2$ L, il terzo $1/4$, il quarto $1/8$ e così via.

Allora il barista fa: "tenete due litri e non rompete che ho da fare!!" (cit. leggermente modificata!)

- Sono sufficienti 2 litri di birra per gli infiniti matematici?
- Se si, sono più del necessario?

Ma anche ai tempi di Zenone (400 a.C.)…

- Una persona scocca una freccia da un punto A e il bersaglio si trova a una certa distanza d.

Allora la freccia non colpirà mai il bersaglio.

- Spiegazione: Infatti, se supponiamo che la freccia si muova a velocità costante, e indichiamo con t il tempo impiegato per percorrere metà del percorso d, allora il tempo $t/2$ sarà quello impiegato per percorrere la prima metà della seconda metà del percorso, cioè $d/2$, e così via.

Per percorrere quindi tutti i tratti infiniti mancanti….occorrerà un tempo infinito!

Come risolviamo questo paradosso (detto Paradosso di Zenone)?

Serie geometrica

Consideriamo la serie geometrica di **ragione** q: $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$

essendo $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si ha che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & se \quad |q|<1 & \text{convergente} \\ +\infty & se \quad q \geq 1 & \\ \infty & se \quad q<-1 & \Big\} \text{ divergente} \\ \nexists & se \quad q=-1 & \text{indeterminata} \end{cases}$$

esempi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (0.2)^n = \frac{1}{1-0.2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{7}} - \left(\left(\frac{3}{7}\right)^0 + \left(\frac{3}{7}\right)^1\right)$$

Esercizi

- Dire se le seguenti serie sono convergenti, divergenti o indeterminate e se possibile calcolarne la somma

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}3^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}5^{-n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{2}\right)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-4)^{-n} \qquad \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n \qquad \sum_{n=4}^{\infty}3^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}5^{-n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n$$

Risolvere i due problemi

- Matematici:

Litri di birra bevuti:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

- Paradosso di Zenone:

Tempo impiegato T, dove t è il tempo impiegato per percorrere metà distanza

$$T=t+\frac{t}{2}+\frac{t}{4}+\frac{t}{8}+\frac{t}{16}+..=t\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right)=$$
$$=t\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=t\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2t$$

Cioè due volte il tempo impiegato per percorrere metà distanza (com'è ovvio).

Condizione necessaria per la convergenza della serie

Condizione necessaria per la convergenza delle serie è che

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$$

ma questa condizione **non è sufficiente**.

- Essendo necessaria, se $\lim_{n\to+\infty} s_n \neq 0$ oppure se il limite non esiste, allora la serie non è convergente.

Esercizi

- Dire se le seguenti serie convergono, in caso affermativo, calcolarne la somma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n+1} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} 6^{-n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n^2}{\ln n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-6)^{-n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-6)^{n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{12n^2+3n}{34n+3}$$

Lezione 3

- Leggi di ricorrenza
- Sistemi dinamici discreti

I conigli di Fibonacci

Leggenda: nel 1202 l'imperatore Federico II di Svevia propose alla corte questo problema:

- Sia data una coppia iniziale di conigli adulti che genera ogni mese una coppia di cuccioli. Gli animali diventano adulti in un mese e sono in grado di riprodursi. Non si considera la mortalità dei conigli.
- E' possibile trovare quanti conigli ci sono dopo un certo numero di mesi senza seguire il processo passo per passo?

F_k: numero di coppie di conigli al mese k

$F_0 = 1, F_1 = 2, F_2 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13, \ldots.., F_k =?$

$$\boldsymbol{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}} \qquad \text{con } F_0 = 1, F_1 = 2$$

Leggi di ricorrenza

- Una successione si dice definita **per ricorrenza** se il termine ennesimo è definito sulla base di uno o più termini che lo precedono.
- Esempio la successione di Fibonacci:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{con } F_0 = 1, F_1 = 2$$

- Esempio: $M_n = 3M_{n-1}$, con $M_0 = \frac{1}{3}$
- Esempio: $L_n = (L_{n-1})^2$, con $L_0 = 3$
- Esempio: $P_n = 3P_{n-2} + 2P_{n-1}$, con $P_0 = 1, P_1 = \frac{1}{2}$
- Esercizio: scrivere i primi 5 termini delle successioni M_n e L_n e i primi 4 termini della successione P_n.

Sistemi dinamici discreti

- Molti fenomeni naturali vengono modellizzati usando i sistemi dinamici discreti, per esempio la legge di duplicazione cellulare
$$N_k = 2^k$$

dove il tempo k varia di una unità pari al tempo di replicazione dei batteri.

- Data una funzione $y = f(x)$ definiamo **sistema dinamico discreto** la relazione di ricorrenza
$$x_k = f(x_{k-1})$$

definita per $k \in N$, con x_0 dato iniziale assegnato.

Esempio

- Crescita malthusiana discreta definita dalla legge di ricorrenza $N_t = RN_{t-1}$ con N_0 dato iniziale assegnato, R è il tasso di crescita e il tempo t è misurato in anni.

1. Scrivere i primi 6 termini della successione.
2. Qual è il significato di N_0?
3. Qual è il quarto termine della successione? N_3
4. Quale sarà il 21-esimo termine della successione?

$$
\begin{gathered}
N_0 \\
N_1 = RN_0 \\
N_2 = RN_1 = R(RN_0) = R^2 N_0 \\
N_3 = RN_2 = R(R^2 N_0) = R^3 N_0 \\
N_4 = RN_3 = R(R^3 N_0) = R^4 N_0 \\
\vdots \\
N_k = R^k N_0
\end{gathered}
$$

quindi $N_{(21-1)} = \cdots ?$

Problemi

- Calcolare la numerosità di una popolazione malthusiana al quinto anno, sapendo che il tasso di crescita è 0.25 e la popolazione iniziale è di 50 individui.

- Una popolazione di un predatore selvatico è a rischio di estinzione perché la mortalità supera la natalità e la popolazione si riduce del 5% annuo. Se si descrive il modello con un modello malthusiano discreto e inizialmente si hanno 300 esemplari del predatore, in quanto tempo la popolazione si riduce a meno di 50 esemplari?