Calcolo vettoriale e matriciale

- Vettori
- Operazioni con i vettori
- Proiezione ortogonale

Grandezze scalari e vettoriali

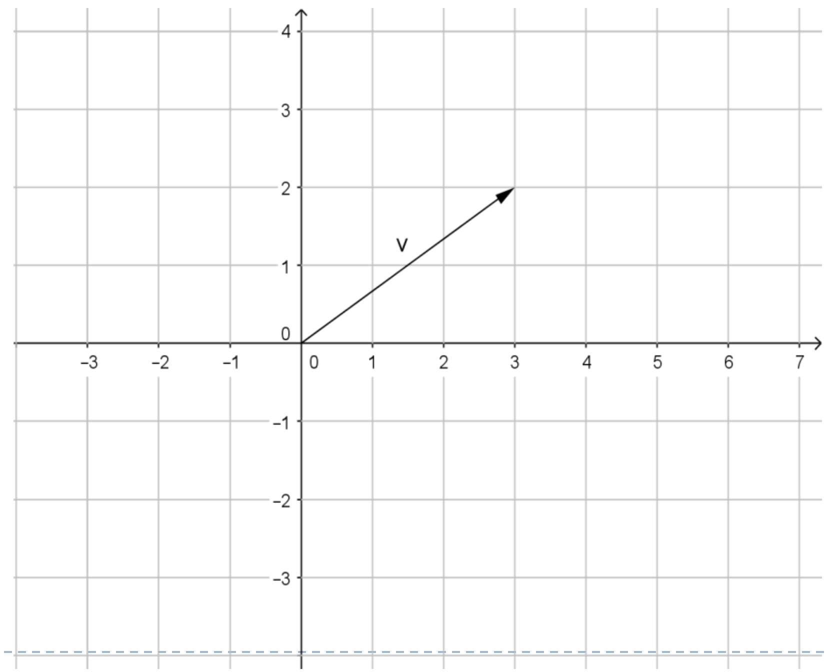
- Grandezze **scalari:** descritte da un numero
  Es: volume, temperatura, tempo, peso, posizione di un punto su una retta
- Grandezze **vettoriali:** descritte da un numero, da una direzione e da un verso
  Es: distanza di un punto dall'origine, velocità, forza
- In generale, un **vettore** $\boldsymbol{v}$ è una grandezza caratterizzata da:
  - **modulo (o ampiezza, o lunghezza)**
  - **direzione**
  - **verso**

  e spesso si indica con $\vec{v}$

Grandezze vettoriali

Dal punto di vista algebrico il vettore che indica lo spostamento OP, si esprime assegnando lo spostamento x sull'asse delle X e lo spostamento y sull'asse delle Y

$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ vettore $\boldsymbol{v}$ dello spazio a due dimensioni di componenti x e y . Esempio $v = (3,2)$



Vettori in R^n e modulo

- Un vettore $\boldsymbol{v}$ nello spazio n-dimensionale R^n, con $n = 1,2,3,..$ è una qualsiasi sequenza di n numeri reali

$$v = \vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

e $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono dette componenti del vettore.

- Il modulo del vettore $\boldsymbol{v}$ è

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

- Oss: il modulo di un vettore è una grandezza scalare.
- Un vettore di modulo 1 si chiama **versore**.

Esercizi

Esercizi:

- Sia $v = (1{,}3)$ un vettore di R^2, rappresentarlo e calcolare il modulo. Verificare che il modulo esprime la distanza di $P = (1{,}3)$ dall'origine.
- Sia $v = (1{,}2{,}3)$ un vettore di R^3, rappresentarlo e calcolare il modulo. Verificare che il modulo esprime la distanza di $P = (1{,}2{,}3)$ dall'origine.

Oss: detta H la proiezione di P sul piano XY, A la proiezione di H sull'asse X e B la proiezione di H sull'asse Y, la distanza PO è data da

$$|PO| = \sqrt{|OH|^2 + |PH|^2} = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2 + |PH|^2}$$

Operazioni con i vettori: Moltiplicazione per uno scalare

Il prodotto di un vettore $\boldsymbol{v}$ di R^n, con $n = 1,2,3, \dots$ per uno scalare $\gamma \in R$, è il **vettore** che si ottiene moltiplicando tutte le componenti del vettore per γ

$$\gamma \boldsymbol{v} = (\gamma v_1, \gamma v_2, \dots, \gamma v_n)$$

- Il vettore $\gamma \boldsymbol{v}$ ha la stessa direzione di $\boldsymbol{v}$, lo stesso verso se $\gamma > 0$, verso opposto se $\gamma > 0$.
- Verificare che il modulo di $\gamma \boldsymbol{v}$ è dato da $|\gamma \boldsymbol{v}| = |\gamma| \cdot |\boldsymbol{v}|$
- Dato il vettore $\boldsymbol{v}$, con $\boldsymbol{v} \neq 0$**,** il vettore

$$\hat{v} = \frac{1}{|v|} v$$

è il versore (vettore di modulo 1) che esprime la direzione e il verso di v.

Moltiplicazione per uno scalare

- Esempi: i versori corrispondenti alle direzioni e verso degli assi cartesiani sono
  $e_x = (1,0)$ e $e_y = (0,1)$ in R^2
  $e_x = (1,0,0)$, $e_y = (0,1,0)$, $e_y = (0,0,1)$ in R^3
- Dato il vettore $v = (4, -2)$, disegnarlo e poi calcolare il prodotto per $\gamma_1 = \frac{1}{2}$ e $\gamma_2 = -2$. Verificare che il prodotto ha come effetto una dilatazione o un rimpicciolimento lungo la stessa direzione e con lo stesso verso. Disegnare i due vettori $\frac{1}{2}v$ e $-2v$ e calcolarne il loro modulo. Determinare il versore e disegnarlo.
- Stesso esercizio di sopra ma con $v = (-2,0)$ e con $\gamma_1 = -\frac{1}{4}$ e $\gamma_2 = 4$.

Somma di vettori

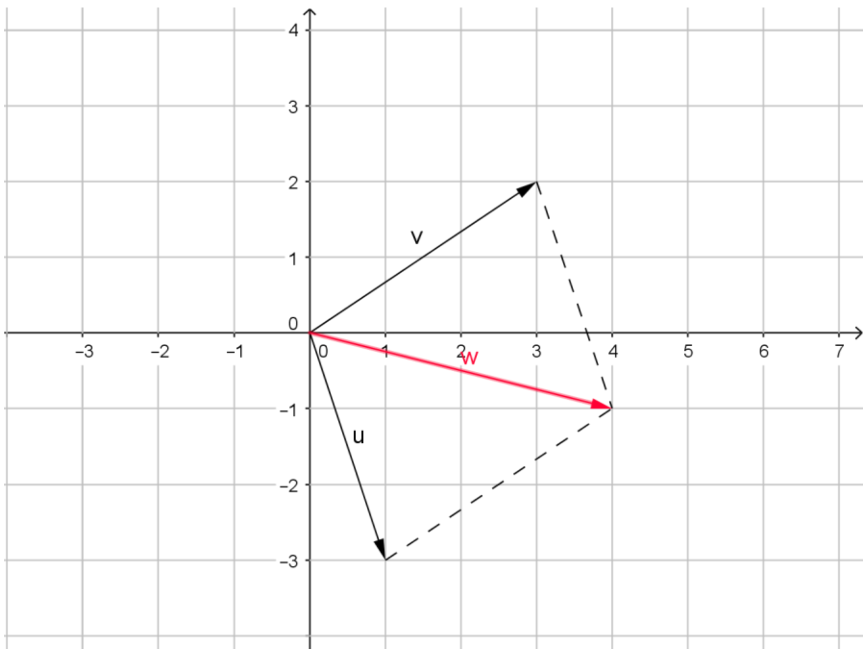
- Dati due vettori $v = (v_1, v_2)$ e $u = (u_1, u_2)$ dello spazio a due dimensioni R^2, il vettore somma $w = v + u$ è il vettore
$$w = v + u = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$
- Nel caso di due vettori u e v dello spazio n-dimensionale R^n

  $v = (v_1, v_2, \dots v_n)$ e $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ la loro somma è il vettore
$$v + u = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots v_n + u_n)$$

- Esempi. Dati i vettori $s = (2,1)$, $t = (1,3)$, $\mathrm{u} = (3, -2)$, $\mathrm{v} = (-1, -2)$, determinare i vettori somma $s + t$ e $u + v$.

Somma di vettori: rappresentazione grafica

- La regola del parallelogramma permette di determinare il vettore somma che corrisponde alla diagonale del parallelogramma (dall'origine comune dei due vettori al vertice opposto)

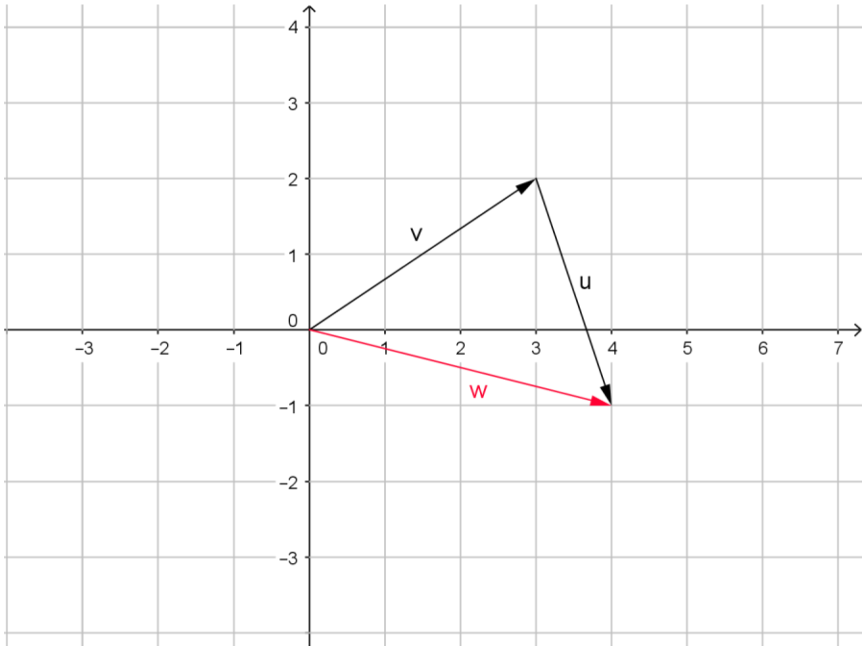


$$v = (3,2) \qquad u = (1,-3)$$

$$u + v = (3 + 1, 2 - 3) =$$
$$= (4,-1)$$

Somma di vettori: rappresentazione grafica

- Metodo punta coda: si trasla uno dei vettori in modo che la coda si sovrapponga alla punta dell'altro vettore.



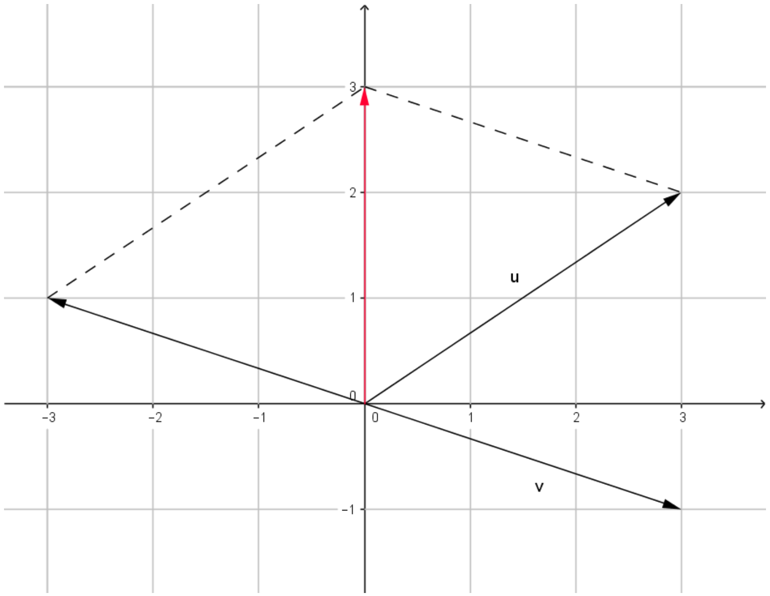
$$v = (3,2) \qquad u = (1,-3)$$

$$u + v = (3+1, 2-3) =$$
$$= (4,-1)$$

Differenza di vettori

- La differenza di due vettori $v - u$ dello spazio R^n è il vettore che si ottiene sommando il primo con l'opposto dell'altro

$$w = v - u = v + (-1)u$$



$$u = (3,2) \qquad v = (3,-1)$$
$$w = u - v = u + (-v) =$$
$$= \big(3 - 3, 2 - (-1)\big) = (0,3)$$

Esercizio. Determinare il vettore differenza dei vettori $v = (2,1)$, $u = (1,3)$ e dei vettori $v = (3,-2)$ e $u = (-1,-2)$. Rappresentare graficamente i vettori e i vettori differenza. Calcolarne il modulo.

Differenza di vettori

- Se P e Q sono due punti di R^n, il vettore differenza che si ottiene sottraendo le coordinate, esprime lo spostamento da P a Q, $\overrightarrow{PQ}$ e il modulo è la distanza PQ:

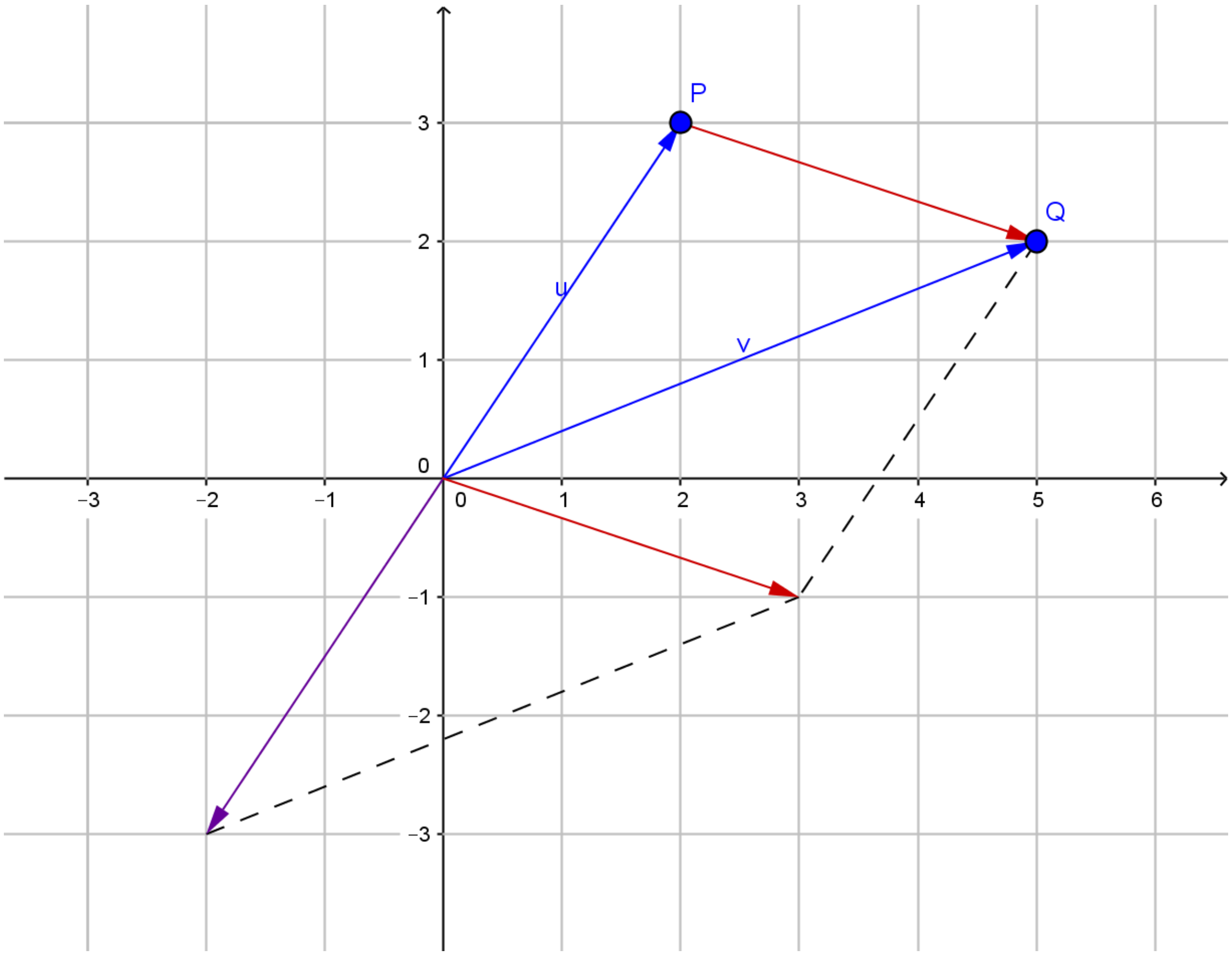
$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n) \text{ e } Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\overrightarrow{PQ} = v = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \dots, q_n - p_n) = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \cdots + (q_n - p_n)^2}$$

- Oss: il vettore non deve essere applicato per forza nell'origine!!

Differenza di vettori



$$v = (5,2); \quad u = (2,3)$$

$$v - u = (3,-1)$$

Combinazione lineare di vettori

- Dati due vettori u, v di R^n e due scalari γ_1, γ_2, si dice combinazione lineare di u e v di coefficienti γ_1 e γ_2 il vettore
$$\gamma_1 u + \gamma_2 v$$
- Dati k vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ di R^n, si dice combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ di coefficienti $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_k$ il vettore
$$w = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_k v_k = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i v_i$$

Esercizio. Determinare il vettore combinazione lineare dei vettori
$v = (-2,1)$; $u = (1,-3)$; $w = (2,-1)$ di coefficienti

$$\gamma_1 = -3 \qquad \gamma_2 = -1/3 \qquad \gamma_3 = 2$$

Baricentro

- Dati k punti materiali P_i , di massa m_i, individuati dai vettori posizione in R^3 $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, detta M la massa totale

$$M = \sum_{i=1}^{k} m_i$$

il baricentro (o centro di massa) è il vettore dato da:

$$B = \frac{m_i}{M} P_1 + \frac{m_2}{M} P_2 + \cdots + \frac{m_k}{M} P_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{M} P_i = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{M} x_i \, , \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{M} y_i \, , \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{M} z_i \right)$$

- Esercizio. Determinare il baricentro dei punti $P_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, di massa $m_1 = 4, P_2 = (0,1)$, di massa $m_2 = 1, P_3 = (1, 0)$, di massa $m_3 = 2$, $P_4 = (1,1)$, di massa $m_1 = 3$,

Prodotto scalare

- Dati due vettori $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ di R^2, il prodotto scalare è un numero (uno scalare) definito da
$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$
- In generale, se $u = (u_1, u_2, \dots u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots v_n)$ di R^n, il loro prodotto scalare è
$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$
- Esercizio. Determinare il prodotto scalare dei vettori

$v = (2,1)$ e $u = (1,3)$

$v = (3, -2)$ e $u = (-1, -2)$

$v = (1, -1, -2)$ e $u = (-1, 2, -2)$

$v = (2,0,0)$ e $u = (0, 2, -2)$

Prodotto scalare: interpretazione geometrica

- Dati due vettori v, u nello spazio R^n, il prodotto scalare è il numero corrispondente al prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso tra le loro direzioni

$$v \cdot u = |v| \cdot |u| \cos \alpha$$

$$\downarrow$$

$$v \perp u \Leftrightarrow v \cdot u = 0$$

(u e v sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo).

Dim:

Siano $u \neq 0$ e $v \neq 0$ ortogonali $\Rightarrow$ $\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow$ per la proprietà di annullamento del prodotto il prodotto scalare è nullo.

Viceversa, se il prodotto scalare è nullo $\Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ i vettori sono perpendicolari.

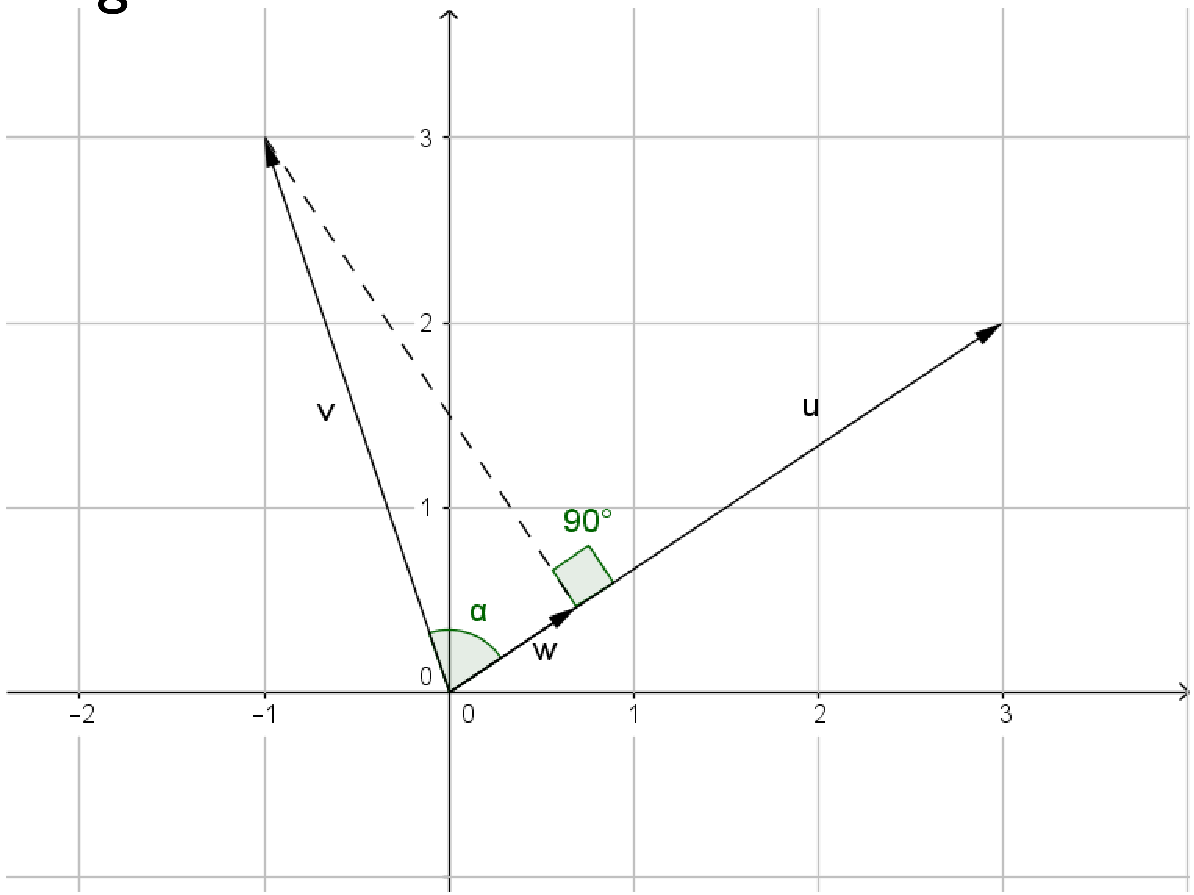
Esercizi

- Calcolare il prodotto scalare dei vettori $\mathrm{u} = (2, 0)$ e $v = (1, 1)$. Disegnarli e individuare graficamente due vettori ortogonali (uno per u e uno per v) e verificare che il loro prodotto scalare è nullo.
- Calcolare il prodotto scalare dei vettori $\mathrm{u} = (2, 1,0)$ e $v = (5, -1, 2)$. Determinare due vettori ortogonali (uno per u e uno per v) e verificare che il loro prodotto scalare è nullo.
- Per quale valore di a i vettori $v_1 = (3, a, 1)$ e $\mathrm{v}_2 = (2, -1, \mathrm{a})$ sono ortogonali?

Proiezione ortogonale di un vettore sulla direzione di un altro vettore

w è il vettore proiezione ortogonale di v su u

α è l'angolo tra u e v



Proiezione ortogonale di un vettore si un altro

- Dati due vettori u, v, sia α l'angolo compreso tra le loro direzioni e $\hat{u}$ il versore di u, allora il numero

$$v \cdot \hat{u} = |v| \cdot |\hat{u}| \cos\alpha = |v| \cos\alpha$$

è la proiezione ortogonale di v lungo la retta individuata dalla direzione di u.

- Mentre il vettore

$$(v \cdot \hat{u})\hat{u}$$

è il vettore proiezione ortogonale di v lungo la direzione di u.

- Esercizio. Determinare le proiezioni ortogonali dei vettori $\mathrm{w}_1 = (0{,}3), \mathrm{w}_2 = (1, 1), \mathrm{w}_3 = (2, -1)$, lungo la direzione del vettore $v = (2, 1)$.

Rappresentare graficamente i vettori e le loro proiezioni ortogonali sul vettore v.

Prodotto vettoriale

- Dati due vettori $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $u = (u_1, u_2, u_3)$ di R^3, il prodotto vettoriale $v \times u$ o $v \wedge u$ è il vettore w dato da

$$w = (v_2u_3 - v_3u_2, v_3u_1 - v_1u_3, v_1u_2 - v_2u_1)$$

- Il prodotto vettoriale è antisimmetrico, cioè
$$v \times u = -u \times v$$
- Esercizio. Verificare che il prodotto vettoriale dei vettori $u = (2,1,0)$ e $v = (5, -1,2)$ è antisimmetrico.

Proprietà del vettore ottenuto col prodotto vettoriale

Il vettore w che si ottiene come prodotto vettoriale ha le seguenti proprietà:

1. il modulo è dato da $|w| = |v \times u| = |v||u| \sin \alpha$, con α angolo tra u e v
2. la direzione coincide con la direzione perpendicolare al piano individuato da u e v
3. il verso coincide con quello determinato dalla **regola della mano destra** : si posizionano le prime tre dita in modo che ciascuno sia perpendicolare agli altri due, poi si punta il pollice secondo direzione e verso del vettore v**,** l'indice in quello del vettore u , il medio indica il verso del vettore prodotto $w = v \times u$