

Sistemi di equazioni lineari

Date le rette di equazioni

$$ax + by + c = 0 \quad \text{e} \quad a'x + b'y + c' = 0$$

quanti punti hanno in comune?

Per rispondere devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

e trovare i punti (x, y) che soddisfano entrambe le equazioni.

Si possono verificare 3 situazioni:

1. il sistema non ha soluzione se le rette sono parallele
2. Il sistema ha una sola soluzione se le rette sono incidenti
3. Il sistema ha infinite soluzioni se le rette sono coincidenti



Rette parallele e vettori

Consideriamo le due rette

$$ax + by + c = 0 \quad \text{e} \quad a'x + b'y + c' = 0$$

- ▶ Sono parallele (o coincidenti) se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare ($m = -\frac{a}{b}$ e $m' = -\frac{a'}{b'}$), cioè se hanno la stessa direzione.
- ▶ Sono parallele se e solo se i vettori (a, b) e (a', b') sono allineati, cioè se $(a, b) = \lambda(a', b')$, con λ un opportuno numero reale.

Infatti

$$(a, b) = \lambda(a', b') \Rightarrow a = \lambda a' \text{ e } b = \lambda b' \Rightarrow m = -\frac{a}{b} = -\frac{\lambda a'}{\lambda b'} = m'$$

Viceversa se

$$m = m' \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ che è vero } \Leftrightarrow \exists \lambda \in R: \frac{a}{b} = \frac{\lambda a'}{\lambda b'} \Rightarrow (a, b) = (\lambda a', \lambda b') = \lambda(a', b')$$



Posizioni reciproche di rette e vettori

Disegnare le seguenti rette e determinare i punti di intersezione.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = \frac{1}{3} \\ 6x = -6y + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Se $(a, b) = \lambda(a', b')$ allora le rette hanno la stessa direzione e quindi sono parallele o coincidenti. Per determinarlo studiamo

- ▶ se $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$ allora le rette sono coincidenti
- ▶ se $(a, b, c) \neq \lambda(a', b', c')$ allora le rette sono parallele



Rette parallele e vettori

Esercizio: Dire se le coppie di rette

- ▶ $x - \frac{y}{2} = 1$ e $2x - y = 3$
- ▶ $3x = 3y + 6$ e $x = 2 + y$
- ▶ $x - y = 2$ e $2x - y = 3$
- ▶ $2x - \frac{y}{3} = 1$ e $y = 6x - 3$
- ▶ $3x = y + 1$ e $2 - x + y = 0$
- ▶ $x - 2y = 2$ e $2x - 4y = 4$
- ▶ $x - 1 = 2y$ e $-6y - 3 = -3x$
- ▶ $\frac{x}{2} + 1 = \frac{y}{2}$ e $x = 2 + y$
- ▶ $x - y = 0$ e $2x + y = 0$

sono parallele, coincidenti, incidenti considerando le direzioni e poi verificarlo mediante la risoluzione del sistema.



Sistemi 3×3

- ▶ Le considerazioni fatte sull'esistenza delle soluzioni valgono anche nel caso di un sistema 3×3 . Le tre equazioni in tre incognite che costituiscono il sistema rappresentano piani nello spazio.

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Se i piani hanno un punto in comune, il sistema ha una sola soluzione
 (x_0, y_0, z_0)

Se il sistema non ha soluzioni, allora i piani non hanno punti o rette comuni.

Se il sistema ha infinite soluzioni, queste possono rappresentare rette o piani.



Esercizi

- ▶ Risolvere i seguenti sistemi e dire quante soluzioni ammette il sistema.

- ▶
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

- ▶
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y = 0 \\ y = 1 - z \end{cases}$$

- ▶
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + 2z = 2 \\ 3x - 3 = -2z \end{cases}$$



Problema degli inquinanti

- ▶ Catene alimentari:

Energia solare → biomassa (mediante fotosintesi) → erbivori → carnivori

- ▶ Cos'altro influisce su un ecosistema?

Le sostanze inquinanti

Problema: Alla foce di un fiume vivono due specie di crostacei c_1 e c_2 e dal fiume arrivano sostanze inquinanti come il mercurio Hg e gli erbicidi E. Queste sostanze inquinano le alghe di cui si nutrono i crostacei, che in questo modo assumono a loro volta queste sostanze inquinanti.

Siano a_1, a_2, a_3 i tre tipi di alghe di cui si nutrono i crostacei. Quanto inquinante assumono le due specie di crostacei?



Problema degli inquinanti

Ogni crostaceo c_1 mangia:

0.20 g di alghe a_1

0.15 g di alghe a_2

0.31 g di alghe a_3

(al giorno)

Ogni crostaceo c_2 mangia:

0.75 g di alghe a_1

0.40 g di alghe a_2

0.55 g di alghe a_3

(al giorno)

La quantità di erbicidi E:

0.58 mg/g nelle alghe a_1

0.41 mg/g nelle alghe a_2

0.70 mg/g nelle alghe a_3

La quantità di mercurio Hg:

0.62 mg/g nelle alghe a_1

0.73 mg/g nelle alghe a_2

0.81 mg/g nelle alghe a_3

- ▶ Quanto inquinante ingerisce al giorno ogni singolo crostaceo del tipo c_1 ? E un crostaceo del tipo c_2 ?

- ▶ Il crostaceo di tipo c_1 ingerisce:

$0.20 * 0.58 + 0.15 * 0.41 + 0.31 * 0.70$ mg di erbicidi E

$0.20 * 0.62 + 0.15 * 0.73 + 0.31 * 0.81$ mg di mercurio Hg

Problema degli inquinanti

- Come possiamo rappresentare in forma compatta questi dati in modo da poter determinare con un unico calcolo la quantità di inquinanti ingeriti dalle due specie? Usiamo delle tabelle

Crostacei c_1 mangiano:

0.20 g di alghe a_1

0.15 g di alghe a_2

0.31 g di alghe a_3

Crostacei c_2 mangiano:

0.75 g di alghe a_1

0.40 g di alghe a_2

0.55 g di alghe a_3

$$\begin{matrix} & c_1 & c_2 \\ a_1 & 0.20 & 0.75 \\ a_2 & 0.15 & 0.40 \\ a_3 & 0.31 & 0.55 \end{matrix}$$

La quantità di erbicidi E:

0.58 mg/g nelle alghe a_1

0.41 mg/g nelle alghe a_2

0.70 mg/g nelle alghe a_3

La quantità di mercurio Hg:

0.62 mg/g nelle alghe a_1

0.73 mg/g nelle alghe a_2

0.81 mg/g nelle alghe a_3

$$\begin{matrix} & E & Hg \\ a_1 & 0.58 & 0.62 \\ a_2 & 0.41 & 0.73 \\ a_3 & 0.70 & 0.81 \end{matrix}$$

Matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.75 \\ 0.15 & 0.40 \\ 0.31 & 0.55 \end{pmatrix}$$

A è una matrice con 3 righe e 2 colonne
 $\Rightarrow$ A è una matrice 3x2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

quante righe ha la matrice B? 2
quante colonne ha la matrice B? 3

Esercizio: Scrivere una matrice 3x3.

Esercizio: Scrivere una matrice 2x2.



Vettori e Matrici (elementi)

Un vettore v se rappresentato nella forma

$v = (x \quad y)$ è detto **vettore riga**,

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è detto **vettore colonna**

L'operazione che trasforma un vettore riga in un vettore colonna, o viceversa è detta: **Trasposizione**

Analogamente si può definire la trasposizione per le matrici:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice trasposta di A è A^T : $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice trasposta di B è B^T : $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$



Prodotto righe per colonne

Dato un vettore $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e una matrice $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definiamo il **prodotto righe per colonne** della matrice per il vettore

$$w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Il vettore w si dice **trasformato di v mediante T** , la prima componente del vettore trasformato si ottiene moltiplicando scalarmente la prima riga per il vettore v , la seconda moltiplicando scalarmente la seconda riga per il vettore v .

Esempio: Calcolare il seguente prodotto

$$Tv = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2) + 2(-1) \\ 3(-2) + 4(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$$



Vettori e Matrici (elementi)

- ▶ Una tabella di numeri reali composta da **n righe** ed **m colonne** si dice **matrice $n \times m$**
- ▶ Ogni elemento di una matrice è individuato da due indici, il primo indica la riga, il secondo la colonna:
l'elemento generico T_{ij} è il numero che si trova all'incrocio tra la riga i e la colonna j

- ▶
$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1m} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nm} \end{pmatrix}$$

- ▶ Per indicare la matrice si usa anche la forma compatta
 $T = \{T_{ij}\}$ con $i = 1, 2, \dots, n$ $j = 1, 2, \dots, m$



Matrice identità

- ▶ La matrice 2×2 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si chiama **matrice identità** perché lascia invariati tutti i vettori.
- ▶ Esercizio. Definire un vettore e verificare l'affermazione.
- ▶ La matrice identità $n \times n$ è la matrice fatta di zeri che ha 1 sulla diagonale.



Vettori e Matrici (elementi)

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Qual è l'elemento T_{21} ? -1

Qual è l'elemento T_{31} ? 2

Scrivere la matrice identità 4x4 e fare il prodotto con il vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$Iv = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Matrici. Somma

Date due matrici $n \times m$, $A = \{A_{ij}\}$ e $B = \{B_{ij}\}$, con $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$, definiamo

la **somma di matrici** $A + B = \{A_{ij} + B_{ij}\}$ la matrice $n \times m$ che ha come elementi la somma dei corrispondenti elementi di A e di B .

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 - 3 & 2 + 2 & 3 + 1 \\ 4 - 1 & 5 - 2 & 6 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$A + C = ?$ Non si può fare perché non hanno lo stesso numero di colonne!



Matrici. Somma e moltiplicazione per uno scalare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A - B = ?$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 - 2 & 2 - (-3) \\ -1 - 1 & 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ Sia γ uno scalare e A una matrice, il prodotto della matrice A per lo scalare γ è la matrice $\gamma A = \{\gamma A_{ij}\}$ $n \times m$ che ha come elementi gli elementi di A moltiplicati per γ

- ▶ Esempio: siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\gamma = -2$,

$$\text{allora } \gamma A = \begin{pmatrix} 1(-2) & 3(-2) \\ 2(-2) & 4(-2) \\ -1(-2) & 2(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -4 & -8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$



Prodotto tra matrici

Date le matrici A $n \times k$ (n righe e k colonne) e B $k \times m$ (k righe e m colonne)

definiamo la **matrice prodotto** righe per colonne, la matrice

$$C = AB \quad n \times m$$

il cui elemento C_{ij} è ottenuto moltiplicando scalarmente l' i -esimo vettore riga di A per il j -esimo vettore colonna di B

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{ik}B_{kj} = \sum_{r=1}^n A_{ir} B_{rj}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = ?$ A è una matrice 2×2 , B è una matrice 2×3 , quindi AB è la matrice 2×3

$$AB = \begin{pmatrix} 3 - 2 & 1 + 2 & -1 - 1 \\ 6 + 6 & 2 - 6 & -2 + 3 \end{pmatrix}$$



Matrici. Somma, moltiplicazione per uno scalare e prodotto

Date due matrici $n \times m$, $A = \{A_{ij}\}$ e $B = \{B_{ij}\}$ con $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$ e uno scalare γ , definiamo:

- ▶ **Somma** di matrici $A + B = \{A_{ij} + B_{ij}\}$ è la matrice $n \times m$ che ha come elementi la somma dei corrispondenti elementi di A e di B .
- ▶ **Moltiplicazione per uno scalare**, la matrice $\gamma A = \{\gamma A_{ij}\}$ $n \times m$ che ha come elementi gli elementi di A moltiplicati per γ .
- ▶ **Prodotto**. Data la matrice A $n \times k$ e B $k \times m$ definiamo la matrice prodotto righe per colonne la matrice $C = AB$ $n \times m$ il cui elemento C_{ij} è ottenuto moltiplicando scalarmente l' i -esimo vettore riga di A per il j -esimo vettore colonna di B .

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{ik}B_{kj} = \sum_{r=1}^k A_{ir}B_{rj}$$



Somma, moltiplicazione per uno scalare e prodotto di matrici. Matrice inversa

Esempi. Date le due matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e lo scalare $\gamma = -3$

Determinare la somma $A + B$, la moltiplicazione per lo scalare γA , il prodotto AB .

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \gamma A = \begin{pmatrix} -3 & 18 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + (-6) \cdot 3 & 1 \cdot 1 + (-6) \cdot 0 \\ 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice inversa T^{-1} della matrice T è la matrice per la quale risulta
 $TT^{-1} = 1 = T^{-1}T$



Ricapitolando:

- ▶ Da cosa è caratterizzata una matrice?

Da un numero m di righe e un numero n di colonne.

- ▶ Come si rappresenta in forma generale una matrice $\mathbf{m \times n}$?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = \{A_{ij}\}$$

- ▶ Quando si può fare la somma?

Quando hanno le matrici hanno la stessa dimensione.

- ▶ Come si fa la somma?

$$\mathbf{A} = \{A_{ij}\}, \mathbf{B} = \{B_{ij}\} \text{ con } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} = \{A_{ij} + B_{ij}\}$$



Ricapitolando:

- ▶ Come si fa il prodotto di una matrice A $m \times n$ per uno scalare γ ?

$$A = \{A_{ij}\} \Rightarrow \gamma A = \{\gamma A_{ij}\} \text{ che è una matrice } m \times n$$

- ▶ Quando si può fare il prodotto di due matrici A e B ?

Quando A è una matrice $m \times k$ e B è una matrice $k \times n$.

Allora $C = AB$ è una matrice $m \times n$ le cui entrate sono:

$$C_{ij} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \dots + A_{ik} B_{kj} = \sum_{r=1}^k A_{ir} B_{rj}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + (-6) \cdot 3 & 1 \cdot 1 + (-6) \cdot 0 \\ 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$$



Problema degli inquinanti

- Qual è la quantità di erbicidi e di mercurio ingeriti dalle due specie di crostacei?

Crostacei c_1 mangiano:

0.20 g di alghe a_1

0.15 g di alghe a_2

0.31 g di alghe a_3

Crostacei c_2 mangiano:

0.75 g di alghe a_1

0.40 g di alghe a_2

0.55 g di alghe a_3

$$\begin{matrix} & c_1 & c_2 \\ a_1 & \left(0.20 & 0.75 \right) \\ a_2 & \left(0.15 & 0.40 \right) \\ a_3 & \left(0.31 & 0.55 \right) \end{matrix}$$

La quantità di erbicidi E:

0.58 mg/g nelle alghe a_1

0.41 mg/g nelle alghe a_2

0.70 mg/g nelle alghe a_3

La quantità di mercurio Hg:

0.62 mg/g nelle alghe a_1

0.73 mg/g nelle alghe a_2

0.81 mg/g nelle alghe a_3

$$\begin{matrix} & E & Hg \\ a_1 & \left(0.58 & 0.62 \right) \\ a_2 & \left(0.41 & 0.73 \right) \\ a_3 & \left(0.70 & 0.81 \right) \end{matrix}$$

- Il crostaceo di tipo c_1 ingerisce:

$0.20 \times 0.58 + 0.15 \times 0.41 + 0.31 \times 0.70$ mg di Erbicidi

$0.20 \times 0.62 + 0.15 \times 0.73 + 0.31 \times 0.81$ mg di mercurio Hg



Problema degli inquinanti

$$\begin{array}{c} c_1 \quad c_2 \\ a_1 \quad \begin{pmatrix} 0.20 & 0.75 \end{pmatrix} \\ a_2 \quad \begin{pmatrix} 0.15 & 0.40 \end{pmatrix} \\ a_3 \quad \begin{pmatrix} 0.31 & 0.55 \end{pmatrix} \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.75 \\ 0.15 & 0.40 \\ 0.31 & 0.55 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.15 & 0.31 \\ 0.75 & 0.40 & 0.55 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} E \quad Hg \\ a_1 \quad \begin{pmatrix} 0.58 & 0.62 \end{pmatrix} \\ a_2 \quad \begin{pmatrix} 0.41 & 0.73 \end{pmatrix} \\ a_3 \quad \begin{pmatrix} 0.70 & 0.81 \end{pmatrix} \end{array} \quad B = \begin{pmatrix} 0.58 & 0.62 \\ 0.41 & 0.73 \\ 0.70 & 0.81 \end{pmatrix}$$

Il crostaceo di tipo c_1 ingerisce:

$$0.20 \times 0.58 + 0.15 \times 0.41 + 0.31 \times 0.70 = 0.40 \text{ mg di Erbicidi}$$

$$0.20 \times 0.62 + 0.15 \times 0.73 + 0.31 \times 0.81 = 0.48 \text{ mg di mercurio Hg}$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.15 & 0.31 \\ 0.75 & 0.40 & 0.55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.58 & 0.62 \\ 0.41 & 0.73 \\ 0.70 & 0.81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.40 & 0.48 \\ 0.98 & 1.20 \end{pmatrix}$$

Esempio: 0.40 è la quantità di erbicidi ingerita da ogni crostaceo c_1



Proprietà delle matrici

Date tre matrici per le operazioni introdotte valgono le seguenti proprietà:

- ▶ $A(B + C) = AB + AC$
- ▶ $(\gamma A)B = \gamma(AB)$
- ▶ $A(BC) = (AB)C$ associatività del prodotto
- ▶ $AB \neq BA$ il prodotto non è associativo

Convincersi facendo i calcoli con le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \gamma = 2$$



Determinante di una matrice

Si chiama **Determinante** di una matrice T 2×2 , e si indica con

$$\det T = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \text{ il numero reale } \det T = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}$$

Esempio: $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\det T = 2(-2) - 1(3) = -7$

Data la matrice quadrata $T = \{T_{ij}\}$ $n \times n$, si chiama **matrice complementare** dell'elemento T_{ij} la matrice ottenuta sopprimendo l' i -esima riga e la j -esima colonna alle quali appartiene l'elemento.

Esempio: $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ la matrice complementare di T_{23} è $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$



Determinante di una matrice

Il determinante di una matrice T $n \times n$, si calcola con il seguente procedimento:

- ▶ si sceglie una riga arbitraria
- ▶ si calcolano i determinanti di tutte le matrici complementari degli elementi della riga scelta
- ▶ si moltiplicano i determinanti per i rispettivi elementi moltiplicati per -1 o 1 con il seguente criterio:
 - ▶ l'elemento T_{ij} ha segno positivo se $i + j$ è pari, negativo se $i + j$ è dispari
 - ▶ si sommano i prodotti così ottenuti.

La regola può essere applicata anche scegliendo una qualunque colonna invece che una riga.



Esempio di calcolo del determinante

► $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1(-3) - 2(3)$

► $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

► $\det B = +1 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= 1(6 - 3) - 0(4 + 0) - 2(-2 - 0) = 3 - 0 + 4 = 7$$

$$\det B = -2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(0 - 2) + 3(2 - 0) + 3(-1 - 0) = 4 + 6 - 3 = 7$$



Determinante e Invertibilità

- ▶ Sia T una matrice quadrata $n \times n$ allora la sua inversa T^{-1} è la matrice $n \times n$ tale che

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I_n$$

- ▶ Per ogni matrice quadrata T esiste l'inversa? NO!!
- ▶ T è **invertibile** se e solo se $\det T \neq 0 \Rightarrow T$ è detta **non singolare**.
- ▶ Se invece $\det T = 0 \Rightarrow T$ è detta matrice **singolare**

Vediamo ora il legame tra l'invertibilità di una matrice e la risoluzione di sistemi lineari.



Matrici e sistemi

► $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ cosa stiamo rappresentando geometricamente?

Quali casi possono verificarsi?

- Intersezione in un punto
- Nessuna intersezione
- Infinite intersezioni (rette coincidenti)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ è la matrice dei coefficienti

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è il vettore dei termini noti

Il sistema precedente si può scrivere in forma compatta come: $Tv = w$



Matrici e sistemi

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{si può vedere come} \quad \begin{cases} T_{11}x_1 + T_{12}x_2 = b_1 \\ T_{21}x_1 + T_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$



Matrici singolari e non singolare: risoluzione di sistemi

Consideriamo il sistema $T\mathbf{v} = \mathbf{w}$ nell'incognita $\mathbf{v}$, con T matrice quadrata $n \times n$ (il sistema ha n righe e n incognite $v_1, \dots, v_n$)

Se la matrice T è **non singolare**, allora la matrice inversa T^{-1} è la matrice che esprime l'unica soluzione del sistema nell'incognita e si ha

$$\mathbf{v} = T^{-1}\mathbf{w}$$

Se la matrice T è singolare, allora il sistema $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ nell'incognita $\mathbf{v}$, ha, oltre alla soluzione nulla, anche un numero infinito di soluzioni $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

Se la matrice T è singolare, allora il sistema $T\mathbf{v} = \mathbf{b}$ nell'incognita $\mathbf{v}$, con $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, può avere nessuna o infinite soluzioni



Esercizio

- Dire quante soluzioni ha il sistema $Av = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -12 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Trasformarlo poi in forma algebrica, risolverlo, e verificare che la soluzione è la stessa.

Rappresentare le rette nel piano cartesiano.



Risoluzione di sistemi . Regola di Cramer

Data la matrice $T = \{T_{ij}\}$ con $i = 1, 2, \dots, n$ $j = 1, 2, \dots, n$

matrice dei coefficienti del sistema $Tv = w$ nell'incognita

$v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, di termine noto $w = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

Se la matrice è non singolare il sistema ha una unica soluzione e si ottiene calcolando

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det T}$$

per $j = 1, 2, \dots, n$, dove B_j è la matrice ottenuta sostituendo w alla colonna T_j della matrice T

Esercizio. Trovare la soluzione del sistema usando il metodo di Cramer

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -x + 3y + z = 0 \\ x + 7z = 1 \end{cases}$$



Matrici e sistemi

La forma generale di un sistema lineare di m equazioni ed n incognite è data da

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \text{\scriptsize} \\ \text{\scriptsize} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

I termini a_{ij} sono i coefficienti del sistema che possono essere rappresentati come elementi della matrice A , i termini noti possono essere rappresentati dal vettore b , le incognite dal vettore x

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Per indicare il sistema si usa anche la forma compatta $Ax = b$ e si ottiene considerando il prodotto (righe per colonne) della matrice A per il vettore x

Esempi di quesiti delle prove scritte

- ▶ Determinare le soluzioni, se esistono, del seguente sistema dato in forma vettoriale

$$Ax = b \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- ▶ Determinare per quali valori di λ il sistema ha soluzione unica. Trovare poi la soluzione quando $\lambda = -2$

$$Ax = b \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \frac{1}{3} & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

