Esercizi facoltativi in preparazione del secondo parziale

di Matematica con Elementi di Statistica

Integrali

1. Dopo aver disegnato il grafico delle seguenti funzioni, calcolare l'area racchiusa tra la curva e l'asse x nell'intervallo indicato, sia mediante il calcolo della primitiva, sia per via geometrica.
   - $f_1(x) = 4$ nell'intervallo [-3; 3]
   - $f_2(x) = 2 + 3x$ nell'intervallo [2; 4]
   - $f_3(x) = 3 - 2x$ nell'intervallo [1; 3]
   - $f_4(x) = x - 1$ nell'intervallo [0; 4]
   - $f_5(x) = |x - 1|$ nell'intervallo [0; 4]

2. Determinare l'area della parte di piano delimitata da:
   - la curva di equazione $y = -x^2 + 4x - 3$ e dall'asse x.
   - la curva di equazione $y = \frac{1}{x}$ nell'intervallo [-3; -1]
   - dai grafici delle funzioni $y = 4x^2$ e $y = 2x^2 + 3$
   - dai grafici delle funzioni $f(x) = 3x^2 - 12$ e $g(x) = 3x + 6$
   - le curve $y = x^2 + 2x + 1$ e $y = x + 1$
   - le curve $y = \frac{1}{x^2}$, $x = -1$, $x = -3$ e $y = 0$

Vettori

3. Dati i vettori $v_1 = (2, 2)$ e $v_2 = (2a, -1)$ trovare, se esiste, il valore (o i valori) del parametro a per cui i due vettori sono ortogonali. Scrivere il vettore v_2 quando $a = 3$.

4. Dati i vettori $v_1 = (2, 2a)$ e $v_2 = (2a, -1)$ trovare, se esiste, il valore del parametro a per cui i due vettori sono ortogonali. Scrivere i vettori v_1 e v_2 in corrispondenza di tale valore di a.

5. Dati i vettori

    - $v_1 = (2, 2a)$ e $v_2 = (2a, -2)$;
    - $v_1 = (2a, 1)$ e $v_2 = (4a, 2)$;
    - $v_1 = (2a, 1, -a)$ e $v_2 = (3, -4, 2)$;
    - $v_1 = (a, a, -2)$ e $v_2 = (a, 1, 3)$

    trovare, se esiste, il valore (o i valori) del parametro a per cui i due vettori sono ortogonali.

6. Dati i vettori $v_1 = (2, 2)$ e $v_2 = (1, 3)$:

    - calcolare il modulo di v_1 e il versore corrispondente;
    - disegnare l'opposto di v_2 e si disegni poi, usando la regola del parallelogramma, il vettore $v_1 - v_2$, si confermi poi col calcolo che le componenti trovate sono corrette;
    - scrivere e disegnare i vettori proiezione ortogonale di v_1 su v_2 e di v_2 su v_1;
    - calcolare e disegnare i vettori proiezione ortogonale di v_2 sull'asse delle x e di v_2 sull'asse delle y;
    - calcolare il prodotto scalare dei vettori v_1 e $v_2 - v_1$.

7. Dati i vettori $v_1 = (2, 3)$ e $v_2 = (1, -3)$:

    - calcolare il modulo di v_2 e il suo opposto;
    - disegnare l'opposto di v_1 e si disegni poi, usando la regola del parallelogramma, il vettore $v_2 - v_1$, si confermi poi col calcolo che le componenti trovate sono corrette;
    - calcolare il versore di v_2 e moltiplicarlo scalarmente per $v_1 - v_2$;
    - scrivere e disegnare i vettori proiezione ortogonale di v_1 su v_2 e di v_2 su v_1;
    - calcolare e disegnare i vettori proiezione ortogonale di v_2 sull'asse delle x e di v_2 sull'asse delle y;
    - calcolare il prodotto scalare dei vettori v_1 e $v_2 - v_1$.

Matrici

8. Date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   - Calcolare, se possibile, i determinanti delle precedenti matrici
   - Calcolare, se possibile, i prodotti delle matrci prese a due a due (per esempio AB, BA, AC, CA, ...)
   - Calcolare il prodotto λA, dove $\lambda = 3$.

   Sistemi lineari

9. Date le rette

   - $2x - 3y = 4$ e $x - \frac{3}{2}y = 2$;
   - $2x - 3y = 4$ e $x - \frac{3}{2}y = -2$;
   - $2x - 3y = 4$ e $2x + 3y = 2$

   dire, considerando le direzioni, se hanno punti in comune ed eventualmente quanti. Verificare poi col calcolo la risposta (risolvendo il sistema) e disegnarle. Si trasformi il sistema in forma matriciale ($Ax = b$) e calcolando il determinante si stabilisca se questo è in accordo con il risultato ottenuto.

10. Dati i piani di equazione

    - $x - y + z = 1$ e $2x - 2y + 2z = 2$ e $3x - 3y + 3z = 3$;
    - $x - y + z = 1$ e $2x - 2y + 2z = -2$ e $3x - 3y + 3z = 1$;
    - $x - y + z = 1$ e $x + y + z = 2$ e $z - x = 1$;
    - $x - y + z = 1$ e $x + y + z = 2$ e $2x = 3 - 2z$

    dire se hanno punti in comune ed eventualmente quanti. Scrivere il sistema in forma matriciale $Ax = b$, calcolare il determinante di A e vedere se è in accordo con il risultato ottenuto.

11. Dati i sistemi $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 3b \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dire se ogni sistema ha un'unica soluzione (suggerimento: con lo studio del determinante) e in caso affermativo la si calcoli (passando dalla forma matriciale alla forma algebrica). Se la soluzione non è unica, si dica se sono infinite o nessuna.

12. Dati i sistemi $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -k & k \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

determinare per quali valori del parametro $k \in R$ il sistema non ha un'unica soluzione e, per tali valori, si dica se ne ha nessuna o infinite.

13. Discutere, al variare di $k \in R$, le soluzioni dei seguenti sistemi (suggerimento: si passi alla forma matriciale)

$$\begin{cases} 2x + (k-1)y - 3 = 0 \\ -x + 3ky = 2 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} 2kx + (k+1)y + 2 = 0 \\ -2x + 3(k-1)y + 2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} (k+1)x + (k-1)y = 0 \\ -x + (-k+2)y = 1 \end{cases} \tag{5}$$