Esercizi su integrali e equazioni differenziali in preparazione del secondo parziale

Integrali

- $\int \frac{1}{4\sqrt{x}} dx$ R: $\frac{\sqrt{x}}{2} + c$
- $\int \frac{2x-1}{x^2} dx$ R: $2 \ln |x| + \frac{1}{x} + c$
- $\int \frac{(x-1)(x+2)}{x} dx$ R: $x - 2 \ln |x| + \frac{x^2}{2} + c$
- $\int e^x(1 - 2xe^{-x}) dx$ R: $e^x - x^2 + c$
- $\int \frac{1}{x} (\ln x)^3 dx$ R: $\frac{(\ln x)^4}{4} + c$
- $\int \sqrt{4x+1} dx$ R: $\frac{\sqrt{(4x+1)^3}}{6} + c$
- $\int x\sqrt{x^2+1} dx$ R: $\frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} + c$
- $\int e^{3x+1} dx$ R: $\frac{1}{3}e^{3x+1} + c$
- $\int xe^{x^2} dx$ R: $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$
- $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ (si ponga $\sqrt{x} = t$) R: $2e^{\sqrt{x}} + c$
- $\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ (si ponga $\sqrt{x} = t$) R: $2(\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}) + c$
- $\int 4xe^x dx$ R: $4e^x(x-1) + c$

Equazioni differenziali

Risolvere le seguenti equazioni differenziali

- $y' - 4x + \cos x = 0$, R: $y = 2x^2 - \sin x + k$
- $x - \frac{1}{x^2} = 4y'$, R: $y = \frac{x^2}{8} + \frac{1}{4x} + c$

- $y' + \frac{y}{x} = x$, con $x > 0$, $R: y = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$
- $y' + y + x - 1 = 0$, $R: y = -x + 2 + ke^{-x}$
- $y' = 4xy^2$, $R: y = -\frac{1}{2x^2+k}$

e trovare le soluzioni particolari data la condizione iniziale $y(\pi) = 1$ per la prima equazione e $y(1) = 1$ per tutte le altre (risolvere il problema di Cauchy).

Problemi

- Un punto materiale si muove su una retta, su cui è stato fissato un sistema di riferimento, con velocità $v(t) = \cos(\pi t)$ m/s. Sapendo che la posizione occupata dal corpo all'istante iniziale $t_0 = 0$ è $x_0 = 1$, determina la legge oraria del moto del punto materiale (ovvero la legge $x(t)$ che descrive la posizione del punto materiale al variare del tempo. Ricordare che $v(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t)$.
R: $x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi} + 1$
- In un moto rettilineo la velocità di un punto materiale in m/s è data dalla legge $v(t) = t^2 + t + 1$.
 - a) Determina la legge oraria del moto del punto materiale sapendo che la posizione occupata dal corpo all'istante iniziale $t_0 = 0$ s è $x_0 = 2$ m
 - b) Determina lo spostamento (distanza percorsa) nell'intervallo di tempo compreso tra gli istanti $t_1 = 1$ s e $t_2 = 9$ s.
 - c) Calcolare la velocità media tenuta tra $t_1 = 1$ s e $t_2 = 9$ s (ricordare il teorema della media integrale).
R: $x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + 2$; $\frac{872}{3}m$; $v_m = 36,3$ m/s
- Si vuole formulare un modello empirico che descriva il numero di foglie di una pianta al variare del tempo. Una volta a settimana si contano le foglie della pianta e si ottengono i seguenti dati:

$$f_1 = 14, \quad f_2 = 36, \quad f_3 = 76, \quad f_4 = 140, \quad f_5 = 234,$$

relativi a 5 settimane consecutive.

- a) Qual è il numero medio di foglie rilevato nel periodo di 5 settimane?
- b) La funzione $f(t) = (t+1)^3 + 3(t+1)$, dove t è misurato in settimane, riproduce per $t = 1, \dots, 5$ i valori $f(t) = f_t$. Calcolare la media della funzione $f(t)$ nel periodo di osservazione $t \in [0, 5]$.

R: $f_m = 100$; $\bar{f} = \frac{301}{4}$

- La numerosità di una popolazione si evolve con un tasso di crescita specifico che dipende dal tempo. Indicando con N_0 la numerosità iniziale, determinare $N(t)$ per i due seguenti modelli:

$$N'(t) = \frac{N(t)}{1+t}, \quad N'(t) = \frac{2t}{3t^2+2}N(t)$$

R: $N(t) = N_0(1+t)$; $N(t) = 2^{-\frac{1}{3}} \frac{N_0}{\sqrt[3]{3t^2+2}}$

- L'intensità luminosa di una sorgente varia con la distanza x dalla sorgente, secondo la legge $I(x) = \frac{10}{x^2}$. Qual è l'intensità media percepita lungo un raggio, tra un punto a distanza 5 e uno a distanza 10?

R: $I_m = \frac{1}{5}$.