LAUREA IN SCIENZE NATURALI
(CLASSE L-32 e CLASSE 27)
Lezioni del I semestre – A.A. 2009/201
Matematica con elementi di statistica

(I parte) - 5 crediti – 40 ore di lezione frontale

Docente Maria Polo

Dipartimento di Matematica e Informatica,
Via Ospedale 72-Cagliari

e-mail: mpolo@unica.it tel 070 675 8528

Propedeuticità
Matematica con elementi di statistica è propedeutica a tutti gli insegnamenti del 3° anno

- **Obiettivi dell'insegnamento**
  Acquisire le capacità per saper affrontare un problema scientifico utilizzando strumenti e modelli matematici e statistici.

- **Conoscenze (sapere)**

Teoria degli insiemi. Numeri reali. Funzioni di una variabile reale. Limiti. Calcolo differenziale.

Problemi e applicazioni.

Matematica con elementi di statistica (I parte)

- **Abilità/Capacità (saper fare)**
- Risolvere problemi di aritmetica e geometria elementare. Saper operare in ambito algebrico e con gli strumenti elementari del calcolo vettoriale e della geometria analitica. Determinare e descrivere l’andamento di successioni; determinare e descrivere il grafico di funzioni di una variabile. Saper calcolare derivata e integrale delle funzioni elementari di una variabile reale. Saper affrontare un problema scientifico utilizzando gli strumenti matematici e statistici
- **Comportamenti (saper essere)**
- Essere in grado di individuare gli strumenti matematici atti alla descrizione di fenomeni naturali elementari. Essere in grado di comprendere e risolvere problemi applicativi delle scienze naturali, attraverso l’utilizzo consapevole e autonomo delle conoscenze acquisite.

Testi di riferimento

- 1. **D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, Matematica per le scienze della vita, Ambrosiana, 2008**
- **2. Invernizzi, Matematica nelle Scienze Naturali, Libreria Goliardica Editrice, 1996**
- 3. Dispense del Prof. S. Montaldo A.A. 2008/2009
- 4. Pagani, Salsa, Matematica per i Diplomi universitari, Masson, 1997

I testi sono consultabili presso l'aula 16 e la biblioteca del Dipartimento di Matematica e Informatica

Prerequisiti
Esempi tratti dalla prova di settembre 2009

$$P(a) = a^3 - a^2 - 3a + 1$$

$$P\left(\sqrt{2}\right) = ?$$

$$P\left(\sqrt{2}\right) = -1 - \sqrt{2}$$

$$P\left(\sqrt{2}\right) = -1 + \sqrt{2}$$

$$P\left(\sqrt{2}\right) = 3 - \sqrt{2}$$

$$P\left(\sqrt{2}\right) = 3 + \sqrt{2}$$

$$a^2 + b^2 = 58 \quad \wedge \quad ab = -21 \ \Rightarrow \ (\mathrm{a} - b)^2 = ?$$

$$(\mathrm{a} - b)^2 = 16 \qquad ? \qquad (\mathrm{a} - b)^2 = 100$$

Elementi di teoria degli insiemi

- Definizione. Un insieme è una collezione di oggetti, determinati e distinti, della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico. Tali oggetti si dicono elementi dell'insieme.

- Indichiamo gli insiemi con le lettere A,B,C,D. . .
- e gli elementi di un insieme con le lettere a, b, c, d . . .

- Se a è un elemento di A si scrive

  $a \in A$ (a appartiene ad A)
- Se b non è un elemento di A si scrive

  $b \notin A$ (b non appartiene a A)

Identificare o definire un insieme

- **Per elencazione**

$$A = \{0,1, 2, 3, 4, 5\}$$

- **Proprietà caratteristica** (proprietà comune a tutti gli elementi dell'insieme)

$$A = \{n: n \in N \wedge n \leq 5\}$$

A è l'insieme degli *n* tali che *n* è un numero Naturale e (contemporaneamente)

$n \leq 5$, *n* minore o uguale a 5

Identificare o definire un insieme

- **Proprietà caratteristica** *P(x)*

$$A = \{x: x \in X \wedge P(x)\}$$

P(x) è una proprietà vera per ogni elemento di A ($\forall x \in A$ – $\forall$: quantificatore universale)

P(x) è una proprietà falsa (che non è verificata) per ogni elemento che non appartiene ad A ($\forall x \notin A$)

Fissando il valore di x , *P(x) può essere vera o falsa*

Esempio:

$$P(x) = x > \sqrt{2}$$

vera per *x=2* *falsa per x=0*

Identificare o definire un insieme
Proprietà caratteristiche e notazioni (quantificatori)

- $\forall x$ *per ogni x*

  quantificatore universale significa *per ogni x*, *qualunque x*

- $\exists x$ esiste *x*

quantificatore esistenziale significa esiste almeno un *x*

- $\exists!\, x$ *esiste unico*

quantificatore esistenziale significa esiste un solo *x*

Identificare o definire un insieme
Proprietà caratteristiche e notazioni
Esempi

- Quali elementi appartengono all'insieme?

A = {*x: x* $\in$ *N* $\wedge$ *P(x)= i possibili risultati del lancio di un dado*}

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

B = {*x:* $x \in \Re$ $\wedge$ *P(x)=* |*x*| $\geq$ *0* }

B = insieme di tutti i numeri reali

C = {*x: x* $\in$ *N* $\wedge$ *P(x)= x< 0*}

C = $\emptyset$ C è l'insieme vuoto : insieme che non contiene alcun elemento, non esiste nessun numero naturale *n* che verifica la proprietà *P(x)*

Operazioni con gli insiemi

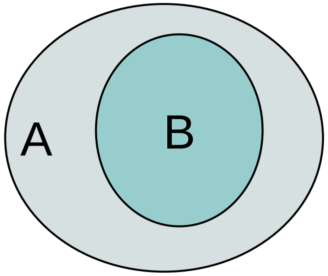
- Un insieme **B si dice sottoinsieme di A** se ogni elemento di B è anche un elemento di A e si indica con

B $\subseteq$ A (B è incluso in A).

ogni sottoinsieme è un sottoinsieme banale di se stesso A $\subseteq$ A.

- Se un sottoinsieme B e strettamente contenuto in A, cioè esistono elementi di A che non appartengono a B (esiste almeno un elemento di A che non appartiene a B), si scrive

B $\subset$ A (B è strettamente incluso in A).



- Due insiemi per i quali valgono contemporaneamente **B $\subseteq$ A e A $\subseteq$ B si dicono uguali.**

Sottoinsiemi e relazione di inclusione nella Sistematica o Tassonomia

- Identificare le diverse specie viventi e dare loro un nome universalmente accettato
- Fare un elenco di tutte le specie viventi sulla terra e raggrupparle progressivamente più estese (problema aperto)

Alcuni livelli e inclusioni **(strettamente inclusi).**

specie $\subset$ famiglia $\subset$ classe $\subset$ regno

Esempio

Coniglio (nome scientifico Oryctolagus cuniculus)

Cuniculus $\subset$ Leporidi $\subset$ Mammiferi $\subset$ Animale

Il numero di elementi che compongono un insieme A è detto cardinalità dell’insieme e indicato con $|A|$

Insiemi finiti – Insiemi infiniti

Esempi di insiemi infiniti

L’insieme dei numeri pari $P = \{p \in N : p = 2n\}$

- L’insieme dei numeri primi $P = \{p \in N : p \text{ è primo}\}$
- Un numero $p \neq 1$ si dice primo se è divisibile solo per 1 e per se stesso. Il teorema di fattorizzazione dei numeri naturali assicura che ciascun numero sia scomponibile in modo unico come prodotto di potenze di numeri primi (detti fattori).

Esempi di insiemi finiti

L’insieme $A = \{p \in N : p = 2n + 1 \wedge 2n +1 < 10,5 \}$

$A = \{p \in N : p \text{ è un numero dispari minore di } 10 \}$

L’insieme $B = \{b \in \Re: b \text{ è soluzione dell'equazione } x^2 +2x + 1 = 0\}$

Operazioni con gli insiemi
Unione - Intersezione

Unione

- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$

Intersezione

- $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$

Esempio

A = {A, C, G, T} (insieme delle basi azotate DNA)

B = {A, C, G, U} (insieme delle basi azotate RNA)

Allora $A \cup B = \{A, C, G, T, U\}$

Allora $A \cap B = \{A, C, G\}$

Operazioni con gli insiemi
Differenza - Complementare

- Differenza
- $A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$

A = {A, C, G, T} (insieme delle basi azotate DNA)
B = {A, C, G, U} (insieme delle basi azotate RNA)

- $A \setminus B = \{T\}$

- Rispetto ad un dato insieme universo U possiamo definire una ulteriore operazione:

- • Complementare
- $C(A) = \{x \in U : x \notin A\}$
- Per esempio se U = N e   A è l'insieme dei numeri pari, allora C(A) è l'insieme dei numeri dispari.

Prodotto cartesiano di A e B

- Dati due insiemi A e B si possono considerare le coppie ordinate (a, b), con $a \in A$ e $b \in B$.
- Una coppia si dice ordinata se il primo elemento appartiene al primo insieme ed il secondo al secondo insieme. Due coppie (a, b) e (a′, b′) sono uguali se a = a′ e b = b′.
- Definizione 1.3. Dati due insiemi A e B si dice prodotto cartesiano di A e B e si indica con A x B, l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b).

Esempio se A = {o, 1} e B = {a, b, c} il prodotto cartesiano è

- A x B = {(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)}

Esercizio di sintesi sugli insiemi

Dati i due insiemi

- $A_t = \{x : x \in R \wedge (x^2 + t)<0 \}$
- $B = \{x : x \in R \wedge x(x^2 + 1)<0 \}$

Determinare al variare di $t \in R$

- $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$
- Se $\exists$ t tale che $A_t \subset B$

Esercizio di sintesi sugli insiemi

Dati i due insiemi

- $A_t = \{x : x \in R \wedge (x^2 + t)<0 \}$
- $B = \{x : x \in R \wedge x(x^2 + 1)<0 \}$

Determinare al variare di $t \in R$

- $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$
- Se $\exists$ t tale che $A_t \subset B$

Risoluzione

- Se $t < 0$
- $A_t = \quad -\sqrt{|t|} < x < \sqrt{|t|}$
- $A_t \cup B = \left(-\infty, \sqrt{|t|}\right)$
- $A_t \cap B = -\sqrt{|t|} < x < 0$
- $A_t \subset B$ NO

- Se $t \geq 0$
- $A_t = \varnothing$
- $B = \{x : x \in R \wedge x<0 \}$
- $A_t \cup B = B$
- $A_t \cap B = \varnothing$
- $A_t \subset B$ SI

$\varnothing \subseteq A \quad \forall A$

Insiemi numerici

Notazioni utilizzate per denotare gli insiemi numerici

- N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . .} numeri naturali
- Z = {. . . − 4,−3,−2,−1, 0, 1, 2, 3, 4, . . .} numeri interi
- Q = {p/q : p, q $\in$ Z, q $\neq$ 0} numeri razionali
- I = numeri irrazionali $\sqrt{2},\ \pi,\ e$
- R numeri reali = Q $\cup$ I

Insiemi numerici

L'insieme dei numeri Irrazionali non è vuoto, contiene almeno radice di 2

$$\exists x :: x \neq \frac{p}{q}, \text{con } p \text{ e } q \text{ interi} \qquad \sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$$

Dimostrazione per assurdo (supponiamo che radice di due sia razionale)
Se lo fosse, allora potrebbe essere scritto nella forma p/q con p e q numeri interi primi fra loro ed elevando al quadrato si avrebbe

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \qquad p^2 = 2q^2$$

Da p^2 divisibile per 2 segue che anche p è divisibile per 2 $\qquad p = 2k,\ k \in Z$.
Sostituendo si ottiene $4k^2 = 2q^2$ da cui, semplificando, $q^2 = 2k^2$. Ma allora anche q^2 è divisibile per 2 e di conseguenza anche q.

Contro l'ipotesi p e q non sarebbero primi fra loro

L'insieme dei numeri reali R
Rappresentazione decimale

- Rappresentazione decimale e forma frazionaria dei numeri razionali

$X = a, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4\, \alpha_5$ allineamento decimale finito o periodico

$X = 12, 25$ $X = 1225/100 = 245/20 = 49/4$

- Numero periodico e forma frazionaria

$$\frac{1}{3} = 0,\bar{3} = \frac{3}{9} \qquad 2,1\bar{3} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{3}{90} = \frac{192}{90} = \frac{32}{15}$$

- Oppure $2,1\bar{3} = \dfrac{213-21}{90} = \dfrac{192}{90} = \dfrac{32}{15}$

- verificare l'uguaglianza

L'insieme dei numeri reali R

Forma polinomiale

Forma polinomiale dei numeri reali

2585, 25

$2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 8 \times 10 + 5 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$

- Rappresentazione dei numeri reali

allineamento decimale infinito (numero infinito di cifre dopo la virgola)

$$X = a, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_i \ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'insieme dei numeri reali R
Approssimazione – Notazione scientifica

- Approssimazione, cifre significative, errore nella approssimazione
- $\pi = 3, 141592.......$
- $3,141592 < \pi < 1,141593$

- $\alpha = (12,35 \pm 0,01)m$

indica che la lunghezza espressa in metri è compresa tra 12,34 *m* e 12,36 *m* *0,01 viene detto errore assoluto*

- Notazione scientifica
- Ogni numero positivo può essere scritto come prodotto di un numero compreso fra 1 e 10 per un'opportuna potenza di 10
- $321573 = 3,21573 \times 10^5$ $0,00015 = 1,5 \times 10^{-4}$

Operazioni in R

- Sono definite due operazioni, la somma e il prodotto,
- $a, b \rightarrow a + b$
- $a, b \rightarrow a\, b$
- Le due operazioni godono delle **proprietà**

commutativa $a + b = b + a$ $\qquad$ $a\, b = b\, a$

associativa $a + (b + c) = (a + b) + c$ $\qquad$ $a\,(b\, c) = (a\, b)c$

distributiva $(a + b)\, c = a\, c + b\, c$

- elemento neutro $a + 0 = a$ $\qquad$ $a\,(1) = a$
- elemento inverso $a + (-a) = 0$ $\qquad$ $a\, 1/a = 1$ $\quad$ se $a \neq 0$

Ordinamento di R
Ordinamento totale

- In R è definito un ordinamento totale
- indicato con il simbolo $\leq$
- $\forall$ a, b $\in \Re$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$

- Questo ordinamento verifica le seguenti proprietà
- riflessiva $a \leq a$
- antisimmetrica se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$
- transitiva se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$

Ordinamento di R e operazioni di somma e prodotto:

- se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c$ per ogni $c \in R$
- se $a \leq b$ e $c > 0$ allora $ac \leq bc$
- se $a \leq b$ e $c < 0$ allora $ac \geq bc$

Intervalli della retta reale

- Siano P e Q due punti della retta reale di ascissa a e b rispettivamente,
- con $a < b$.

- Possiamo considerare i seguenti sottoinsiemi di R:
- [a, b] insieme dei numeri reali tali che $a \leq x \leq b$ **Intervallo chiuso**

- (a, b] insieme dei numeri reali tali che $a < x \leq b$ **Intervallo aperto**

- [a, b) insieme dei numeri reali tali che $a \leq x < b$
- (a, b) insieme dei numeri reali tali che $a < x < b$

A ciascuno di essi corrisponde il segmento di estremi P e Q;, nella rappresentazione sulla retta, gli estremi sono compresi o esclusi

Questi intervalli sono limitati, nel senso che la loro misura è finita o esiste un intervallo con estremi in R che li contiene

Intervalli in R

- Esistono anche intervalli illimitati:

- $(-\infty, a]$ insieme dei numeri reali tali che $x \leq a$
- $(-\infty, a)$ insieme dei numeri reali tali che $x < a$
- $[a,+\infty)$ insieme dei numeri reali tali che $x \geq a$
- $(a,+\infty)$ insieme dei numeri reali tali che $x > a$
- $(-\infty,+\infty)$ tutti i numeri reali

Esempi
Dire se sono intervalli aperti o chiusi

$(-\infty, -3.25] \cap [-7 , -3.3]$

$$\left[3.55, 4.\bar{9}\right] \cap \left(3.2, 5\right]$$

Completezza di R

- La proprietà di completezza (o di continuità) distingue i numeri reali dai numeri razionali Q

- Si definisce sezione di R una coppia (A, B) di sottoinsiemi non vuoti di R tali che
  - $A \cup B = R$, $A \cap B = \emptyset$
  - se $a \in A$ e $b \in B$ allora $a \leq b$

- **Proprietà di completezza** .

Per ogni sezione (A, B) di R esiste uno ed un solo numero reale ℓ tale che, $\forall\, a \in A$ e $\forall\, b \in B$ vale $a \leq \ell \leq b$.

- Il numero ℓ è detto elemento separatore di A e B.

Le Potenze

- Possiamo moltiplicare 5 per tre volte con se stesso, cioè formare il prodotto 5 x 5 x 5 e indicarlo con 5^3.
- Per qualsiasi numero reale: se a è un numero reale, la notazione a^3 sta a indicare *a x a x a.*

- In generale scriviamo a^n (*a* alla *n* oppure *a* elevato *n*),
- dove $n \in N$ rappresenta un numero naturale qualsiasi.

Chiamiamo a^n potenza di base *a* ed esponente *n*

Proprietà fondamentali delle potenze

$a^m a^n = a^{m+n}$

$a^m b^m = (ab)^m$ $\quad$ $a^m/a^n = a^{m-n}$

$a^m/b^m = (a/b)^m$ $\quad$ $(a^n)^m = a^{nm}$

$a^0 = 1$

Le Potenze con esponente reale

- Cosa significa elevare un numero reale *a* per -1?

- Consideriamo le proprietà delle potenze.
- Se prendiamo $m = 0$ e $n = -1$
- Nell'uguaglianza $a^m/a^n = a^{m-n}$ otteniamo
  - $1/a = a^{-1}$.
- Quindi a^{-1} è il reciproco di *a*.

- Allo stesso modo si ottiene $a^{-n} = 1/a^n$.
- <u>Quando $a = 0$</u> è possibile eseguire $a^n = 0$ ma non è possibile calcolare a^{-n}.
- Infatti si avrebbe $0^{-n} = 1/0^n = 1/0$.

Le Potenze con esponente reale

- Usando la proprietà $(a^n)^m = a^{nm}$ possiamo definire anche le potenze con esponente razionale.

- Esempio caso in cui l'esponente vale 1/2
- In questo caso si ha $a^{1/2} = \sqrt{a}$.
- Per definizione, la radice quadrata di un numero è un numero il cui quadrato da il numero iniziale. Da cui, usando la proprietà
- $(a^n)^m = a^{nm}$, segue che $(a^{1/2})^2 = a^{(1/2)2} = a^1 = a$.

- **<u>se $a < 0$,</u> la potenza $a^{1/n}$, con n pari, non ha senso.**
- **Infatti le radici pari dei numeri negativi non sono numeri reali.**

- <u>Se $a > 0$,</u> la potenza a^x può essere definita per esponenti reali arbitrari x.
- **Esempi** 2^x $(½)^x$
- Grafico e studio empirico di 2^x e $½^x$

Il valore assoluto

Valore assoluto del numero reale *x* si indicata con |*x*|.

Esempio il valore assoluto di 2 è 2, il valore assoluto di −3 è 3 e |0| = 0.
Formalmente, al variare di x $\in \Re$, si definisce:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Valore Assoluto e misura

Fissato un punto P sulla retta reale (dotata di sistema di riferimento) di ascissa *x* la misura del segmento OP vale

x se $x > 0$ e vale $-x$ se $x < 0$.

La misura del segmento OP = $|x - 0| = |x|$. Distanza del punto P dall'origine del sistema di riferimento

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano,

- Indichiamo il piano dotato di sistema di riferimento con
- R x R = R^2. Assi coordinati *X* e *Y*

- Ad ogni punto P del piano è associata una coppia ordinata di numeri reali (x_P , y_P) e viceversa

- (x_P , y_P) sono le coordinate del punto P
- x_P è detta ascissa mentre y_P ordinata.

- Il punto di intersezione tra l'asse delle ascisse e quello delle ordinate prende il nome di origine ed è denotato con
- O.

Distanza tra due punti

- Dati due punti sulla retta la distanza è
- $d(P,Q) = |x_Q - x_P|$

- Dati due punti nel piano

$P = (P_x, P_y)$ e $Q = (Q_x, Q_y)$

la distanza tra P e Q, denotata con *d(P,Q),* è data da

(rappresentiamo e calcoliamo la distanza)

$$d(P,Q) = \sqrt{(Q_x - P_x)^2 + (Q_y - P_y)^2}$$

Altri modi di esprimere la distanza e le coordinate dei punti

I logaritmi

- Scegliamo una base $a > 0$ ($a \neq 1$) e consideriamo l'equazione esponenziale $a^x = b$, $b \in R$, $b > 0$

- L'equazione ammette sempre un'unica soluzione.
- Esempio, l'equazione $3^x = 9$
- ha soluzione $x = 2$ (unica)
- L'equazione $16^x = 4$ ha soluzione $x = 1/2$. L'equazione $(1/2)^x = 8$ ha soluzione $x = -3$.

- Ma qual è la soluzione dell'equazione $3^x = 8$?
- Si chiama il logaritmo in base 3 di 8.

I logaritmi

- Definizione

Dati $a > 0$ ($a \neq 1$) e $b > 0$, chiamiamo logaritmo in base a di b il numero (univocamente determinato) x per il quale si ha

- $a^x = b$

E scriviamo $x = log_a b$

Logaritmi: proprietà e casi particolari

- Le proprietà generali sono:
  - $log_a b + log_a c = log_a(bc)$
  - $log_a b - log_a c = log_a(b/c)$
  - $log_a(b_n) = n\ log_a b$
  - $log_a a = 1$
  - $log_a 1 = 0$

- Esiste un ulteriore formula che permette di scrivere un logaritmo in base *a* in una base diversa *c*:
  - $\mathrm{log_a\ b = log_c\ b / log_c\ a}$

Relazioni tra variabili

Formule e parametri

$C = 2\pi r$ $A = \pi r^2$

Esempio: Calcolare il valore numerico della formula

$$w = \frac{2{,}75(a-b)r^2}{m-n}$$

sapendo che *a = 0,012; b = 0,009; r = 0,02; m = 8,1; n = 0,35*
(quale notazione conviene?)

Relazioni tra variabili ***xRy***

- Curve Variabili x, y, z
- Funzioni variabile dipendente, variabile indipendente

Esaminiamo

Circonferenza – Funzioni lineari - Retta – Funzione valore assoluto -

Funzioni – studio di fenomeni

- Le variabili che intervengono in un fenomeno naturale possono essere qualitative (descrivono caratteristiche) e quantitative rappresentabili in termini di numeri reali)
- Individuare relazioni tra due variabili che descrivono il fenomeno
- Siano D e D' gli insiemi dei valori che assunti dalle variabili
- Una funzione *f* è una relazione tra gli elementi di due insiemi, D e D', con la seguente proprietà:

- *f* associa ad **ogni elemento** *v* di D **uno ed un solo** elemento *w* di D' $w = f(v)$

Funzioni – Dominio - Codominio

f associa ad **<u>ogni elemento</u>** *v* di D **<u>uno ed un solo</u>** elemento *w* di D’ $w = f(v)$

D dominio

D’ codominio

Insieme di definizione $\subseteq D$

- Insieme di definizione e “calcolabilità”

3^x -3^x $(-3)^x$

Curve, Funzioni e rappresentazioni

Circonferenza centro l'origine e raggio 1:

$$x^2 + y^2 = 1$$

non è una funzione né rispetto alla variabile x né rispetto ad y

Funzione valore assoluto $f(x) = |x|$

Funzioni lineari $f(x) = ax \quad f(x) = ax + b$

(rappresentazione grafica: retta passante per l'origine – retta in posizione generica)

Retta : $ax + by + c = 0$ oppure $y = mx + q$

Curve, Funzioni e rappresentazioni

Circonferenza centro l'origine e raggio 1:

$$x^2 + y^2 = 1$$

non è una funzione né rispetto alla variabile x né rispetto ad y

Funzione valore assoluto $f(x) = |x|$

Funzioni lineari $f(x) = ax \quad f(x) = ax + b$

(rappresentazione grafica: retta passante per l'origine – retta in posizione generica)

Retta : $ax + by + c = 0$ oppure $y = mx + q$

Il valore assoluto

Valore assoluto del numero reale *x* si indicata con |*x*|.

Esempio il valore assoluto di 2 è 2, il valore assoluto di −3 è 3 e |0| = 0.

Formalmente, al variare di x $\in \Re$, si definisce:

|x| = *x se x ≥ 0*
−x se x < 0

La funzione Valore Assoluto

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Valore assoluto di una funzione

Esempio

$$|x^2+3| = \begin{cases} x^2+3 & \text{per} \quad x^2+3 \geq 0 \\ -(x^2+3) & \text{per} \quad x^2+3 < 0 \end{cases}$$

Rappresentazione grafica di *y*= *f(x)*

Il grafico è la curva rappresentabile sul riferimento cartesiano
Formata dall’insieme dei punti aventi coppie ordinate (x, f(x))

Curve, Funzioni e rappresentazioni

Circonferenza centro l'origine e raggio 1:

$$x^2 + y^2 = 1$$

non è una funzione né rispetto alla variabile x né rispetto ad y

Circonferenza di centro C (x_0, y_0) e raggio r

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Funzioni lineari *f(x) = ax + b*

rappresentazione grafica: retta passante per l'origine – retta in posizione generica

Equazione Retta (equazione di primo grado nelle variabili x e y):

$ax + by + c = 0$ forma implicita

$y = mx + q$ forma esplicita

m si chiama coefficiente angolare

$m = tg\alpha$ (tangente trigonometrica)

q, termine noto, nell'equazione in forma implicita, rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y

Esempi

$F(x) = 5x$ $f(x) = -5x + 2$

Rappresentare graficamente e determinare due punti uno appartenente e uno non appartenente alla retta

Equazione della Retta - equazione di primo grado nelle variabili x e y

- Retta passante per un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e coefficiente angolare *m*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- Retta passante per due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

Problema

- La percentuale dei semi, di una data pianta, che germogliano dipende dalla temperatura dell'ambiente. Per una data varietà di pomodoro è stato verificato che alla temperatura di 12°c germoglia il 40% dei semi, mentre alla temperatura di 15°c germoglia il 70% dei semi. Trovare , supponendo che sia espressa da una funzione lineare, la relazione tra la temperatura e la percentuale di semi germogliati.

- (Funzioni lineari $f(x) = ax \quad f(x) = ax + b$)

Problema - risoluzione

La percentuale dei semi, di una data pianta, che germogliano dipende dalla temperatura dell'ambiente.

Sappiamo che il fenomeno da studiare è lineare

- $P(t) = at$ $\qquad\qquad$ $P(t) = at + b$

la relazione tra la temperatura *t* e la percentuale *P(t)* di semi germogliati è espressa da <u>una funzione lineare</u>

- DATI - Per una data varietà di pomodoro
- t = 12°c $\qquad\qquad$ $P(t)$ = 40% dei semi
- t = 15°c $\qquad\qquad$ $P(t)$ = 70% dei semi

Problema - risoluzione

Sappiamo che il fenomeno da studiare è lineare

$$P(t) = at + b$$

- DATI - Per una data varietà di pomodoro
- t = 12°c $\qquad$ $P(t)$ = 40% dei semi
- t = 15°c $\qquad$ $P(t)$ = 70% dei semi

- Determinare i valori di a e b
- Sapendo che A = (12, 40) e B = (15, 70) sono punto del grafico della funzione (retta generica)
- dal punto di vista matematico: determinare l'equazione delle retta passante per A e B

Problema – risoluzione

- Determinare i valori di a e b

$$P(t) = at + b \qquad\qquad y = at + b$$

- Sapendo che A = (12, 40) e B = (15, 70) sono punti del grafico della funzione (retta generica)
- Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 40 = 12a + b \\ 70 = 15a + b \end{cases}$$

a = 10 b = - 80

Problema - risoluzione

- Sapendo che il fenomeno è lineare

$$P(t) = at + b \qquad\qquad y = at + b$$

- Cioè che $\dfrac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta P(t)}{\Delta t} = a$ è costante

e che A = (12, 40) e B = (15, 70) sono punti del grafico della funzione

- Si può calcolare direttamente $\dfrac{\Delta P(t)}{\Delta t} = a = \dfrac{70-40}{15-12} = \dfrac{30}{3} = 10$

Problema - risoluzione

- Sapendo che il fenomeno è lineare

$P(t) = at + b$ e determinato $a = 10$

- Imporre che A (o B) $A = (12, 40)$ $B = (15, 70)$ siano punti del grafico della funzione
- Utilizzando la formula che permette di calcolare l'equazione della retta, noto il coefficiente angolare e un suo punto
- $P - P_1 = a\,(t - t_1)$ $P - 40 = 10\,(t - 12)$ $P = 10t - 80$

Problema - risoluzione

- Sapendo che il fenomeno è lineare

$$P(t) = at + b$$

- Imporre che A = (12, 40) e B = (15, 70) siano punti del grafico della funzione
- Utilizzando la formula che permette di calcolare l'equazione della retta, noti due suoi punti
- $\dfrac{P(t) - 70}{70 - 40} = \dfrac{t - 15}{15 - 12}$ da cui $P(t) = 10t - 80$

Valore assoluto di una funzione
Funzioni non lineari

Esempio

$$\left|x^2+3\right| = \begin{cases} x^2+3 & \text{per} \quad x^2+3 \geq 0 \\ -\left(x^2+3\right) & \text{per} \quad x^2+3 < 0 \end{cases}$$

Rappresentazione grafica di *y = f(x)*

e di *y* = |*f(x)* |

Esempio *f(x)* = x^2 *-3x +1* *funzione quadratica – rappresentazione grafica*

y = x^2 *-3x +1* *equazione della parabola*

Funzione definita a tratti
Funzione costante a tratti

Funzione definita a tratti se la relazione tra le variabili che la definisce assume forme diverse in domini diversi (Rappresentare il grafico)

$$G(T)=\begin{cases} 6T-90 & \text{se} \quad 15 \le T \le 30 \\ 90 & \text{se} \quad 30 < T < 35 \\ -18T+720 & \text{se} \quad 35 \le T \le 40 \end{cases}$$

Funzione costante a tratti se la relazione tra le variabili che la definisce assume valori costanti diversi in domini diversi

Caso particolare: funzioni a gradino

$$g(z)=\begin{cases} -2 & \text{se} \quad z \le 0 \\ -1 & \text{se} \quad 0 < z < 3{,}5 \\ 1 & \text{se} \quad z \ge 3{,}5 \end{cases}$$

Funzioni e simmetrie

Funzione pari $f(-x) = f(x)$

il grafico è simmetrico rispetto all'asse y

Esempio $f(x) = x^2$ *parabola con vertice nell'origine*

$f(x) = \cos x$

Funzione dispari $f(-x) = -f(x)$

il grafico è simmetrico rispetto all'origine

Esempi $f(x) = tgx$ $f(x) = senx$

Funzioni e traslazioni

Traslazione di vettore parallelo all'asse *x* (direzione parallela all'asse *x*)

Data la funzione $f(x)$ e noto il suo grafico:

il grafico della la funzione $f(x-x_0)$ si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ di x_0 unità nel verso positivo (verso destra)

il grafico della la funzione $f(x+x_0)$ si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ di x_0 unità verso sinistra.

Esempi

$f(x) = x^2$ $\quad g(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ $\qquad h(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

Verificare disegnando il grafico delle tre funzioni quadratiche (parabola)

Funzioni e traslazioni

Traslazione di vettore parallelo all'asse y

Data la funzione $f(x)$ e noto il suo grafico:

il grafico della la funzione $f(x)-x_0$ si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ di x_0 unità in verso negativo (verso il basso)

il grafico della la funzione $f(x)+x_0$ si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ di x_0 unità in verso positivo (verso l'alto).

Esempi

$f(x) = 5^x \quad g(x) = 5^x - 1 \qquad\qquad h(x) = 5^x + 1$

Verificare disegnando il grafico delle tre funzioni esponenziali

Determinare il dominio D e il segno delle tre funzioni $\forall x \in D$

Funzioni crescenti, decrescenti

Data la funzione *f(x)* definita nel dominio $D \subseteq \Re$

Definizione.

f(x) si dice crescente nell'intervallo I = [a, b] $\subseteq$ D se

$$\forall \, \mathbf{x_1} \text{ e } \mathbf{x_2} \in \mathbf{I} \qquad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Definizione.

f(x) si dice decrescente nell'intervallo I = [a, b] $\subseteq$ D se

$$\forall \, \mathbf{x_1} \text{ e } \mathbf{x_2} \in \mathbf{I} \qquad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Esempi

$f(x) = x^2$ $\quad g(x) = 5^x - 1$ $\quad h(x) = tgx$ $\quad w(x) = senx$

Funzioni limitate - massimi e minimi locali e assoluti

Data la funzione *f(x)* definita nel dominio $D \subseteq \Re$:

Definizione.

Si dice che f(x) ha un punto di **massimo locale** in $x_o \in \mathbf{I}$, $I = [a, b] \subseteq D$, se

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I} \qquad \boldsymbol{f(x_0) \geq f(x)}$$

tale valore **max f = $\mathbf{f(x_0)}$, $\in$ f(D) insieme immagine o codominio di f**

Definizione.

Si dice che f(x) ha un punto di **minimo locale** in $x_o \in \mathbf{I}$, $I = [a, b] \subseteq D$, se

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I} \qquad \boldsymbol{f(x_0) \leq f(x)}$$

tale valore **min f = $\mathbf{f(x_0)}$, $\in$ f(D) insieme immagine o codominio di f**

Esempi

$f(x) = (x + 1)^2$ $\qquad\qquad$ $g(x) = 5^x - 1$

Massimi e minimi locali e assoluti
Funzioni limitate

Data la funzione *f(x)* definita nel dominio $D \subseteq \Re$:

Definizione. Massimo e minimo assoluti

Si dice che il valore **max f = $f(x_0)$ è massimo assoluto di** f(x) in tutto il suo Dominio D se

$$\forall x \in D \qquad f(x_0) \geq f(x)$$

Si dice che il valore **min f = $f(x_0)$ è minimo assoluto di** f(x) in tutto il suo Dominio D , se

$$\forall x \in D \qquad f(x_0) \leq f(x)$$

tale valore **min f = $f(x_0)$, $\in$ f(D) insieme immagine o codominio di f**

Esempi

$f(x) = -(x+1)^2 + 2$ massimo assoluto = 2 (valore assunto per $x = -1$)

non ha minimo assoluto $\in \Re$

Funzioni limitate
Data la funzione *f(x)* definita nel dominio $D \subseteq \Re$

Definizione. Funzione limitata

Si dice che f(x) è limitata in tutto il suo Dominio D

Se il codominio è un insieme (intervallo) limitato (può essere sia chiuso che aperto), sottoinsieme proprio di $\Re$

Cioè se il massimo e il minimo assoluti sono appartenenti ad $\Re$, oppure

Se l'estremo superiore e inferiore sono appartenenti ad $\Re$, quando il codominio è un intervallo aperto

Esempi

$f(x) = (x + 1)^2$ *funzione limitata solo inferiormente*

Codominio $= [0, +\infty[$ *Min* $f = 0$, *sup* $f = +\infty$

$g(x) = 5^x - 1$ *funzione limitata solo inferiormente*

Codominio $=]-1, +\infty[$ *inf* $f = -1$, *sup* $f = +\infty$

Funzioni limitate
Data la funzione *f(x)* definita nel dominio $D \subseteq \Re$

Esercizi.

$f(x) = (x + 1)^2$ $g(x) = 5^x - 1$

Determinare il dominio naturale,

disegnare il grafico (approssimativo)

scegliere un intervallo del dominio in cui le funzioni risultino limitate.

Funzioni limitate
Data la funzione *f(x)* definita nel dominio $D \subseteq \Re$

Definizione. Funzione limitata

Si dice che f(x) è limitata in tutto il suo Dominio D

Se il codominio è un insieme (intervallo) limitato (può essere sia chiuso che aperto), sottoinsieme proprio di $\Re$

Cioè se il massimo e il minimo assoluti sono appartenenti ad $\Re$, oppure

Se l'estremo superiore e inferiore sono appartenenti ad $\Re$, quando il codominio è un intervallo aperto

Esempi

$f(x) = (x + 1)^2$ *funzione limitata solo inferiormente*

Codominio = $[0, +\infty[$ *Min* $f = 0$, *sup* $f = +\infty$

$g(x) = 5^x – 1$ *funzione limitata solo inferiormente*

Codominio = $]-1, +\infty[$ *inf* $f = -1$, *sup* $f = +\infty$

Funzioni e studio del grafico

Esempi

$f(x) = -(x+1)^2 + 2$

$g(x) = 5^x - 1$

$h(x) = tgx$ $\qquad$ $w(x) = senx$

Determinare il dominio D, il segno delle funzioni

$\forall x \in D$ *, dire se sono crescenti, decrescenti in D*

Dire se il codominio è un intervallo aperto o chiuso, determinare un intervallo in cui f, h, h siano limitate.

Funzioni composte

- Date le due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ se l'immagine di f è inclusa nell'insieme di definizione di g (il dominio della g coincide con il codominio della f) si può costruire la funzione composta (f composto g)
  - $g \circ f : A \to C$ nel modo seguente:
    - $x \to f(x) \to g(f(x))$.

Quindi $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Esempio

- $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2^x$. La funzione g è definita $\forall x \in \Re$
- Quindi possiamo costruire la funzione composta $g \circ f$
- $$x \xrightarrow{f} 2x + 1 \xrightarrow{g} 2^{2x+1}$$

Funzioni iniettive, suriettive

- Una funzione $f : A \rightarrow B$ **si dice iniettiva** se
  - $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

- o, in modo equivalente, f è iniettiva se
- $f(x_1) = f(x_2)$ implica che $x_1 = x_2$.

Esempio

h(x) = tgx *è iniettiva*

w(x) = senx *non è iniettiva*

- Data una funzione $f : A \rightarrow B$ chiamiamo immagine di f l'insieme di tutti gli elementi di B che sono immagine di qualche elemento di A:

$$Imm(f) = \{b \in B : \exists\ a \in A \text{ con } f(a) = b\} \subseteq B.$$

- Una funzione $f : A \rightarrow B$ **si dice suriettiva** se $Imm(f) = B$.

Funzioni biiettive
Funzione inversa

- Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice **biiettiva se è simultaneamente iniettiva e suriettiva.**

Esempio

- Le funzioni biiettive sono invertibili.

Data una funzione biiettiva $f : A \rightarrow B$ **l'inversa di f, denotata con**

$f^{-1} : B \rightarrow A$, è l'unica funzione da B in A tale che se

$$y = f(x) \quad \text{allora} \quad f^{-1}(y) = x.$$

Esempio

$$f(x) = tgx \qquad f^{-1}(x) = arctgx$$

Sono invertibili in un dato intervallo I le funzioni monotone in I (sempre crescenti, o sempre decrescenti nell'intervallo)

L'operazione di limite per funzioni di una variabile

Esempio $f(x) = tgx$ Dominio $x \neq \pi/2 + k\pi$

Consideriamo la restrizione di f all'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$ e studiamo il comportamento di f agli estremi dell'intervallo

Diciamo che per x che tende a $\pm\ \pi/2$ la funzione f(x) tende a $\pm\infty$ o, in modo equivalente, la funzione ha limite $\pm\infty$, o la funzione è divergente (convergente a $\pm\infty$)

Definizione

f(x) tende a $+\infty$, per x che tende a $\pi/2$ da sinistra, se $\forall k>0$ $\exists\delta(k)$ tale che $f(x) > k$ per $\forall x \in (\pi/2 - \delta(k), \pi/2)$

La retta $x = \pi/2$ è un asintoto verticale per la funzione tgx

Esempio

Verificare che *tgx* tende a $-\infty$ per *x* che tende a $-\pi/2$ da destra

L'operazione di limite per funzioni di una variabile

Esempio $f(x) = 2^x$ Dominio $\Re$

Diciamo che per x che tende a $-\infty$ f(x) tende a 0 o, in modo equivalente, la funzione ha limite zero, o la funzione è convergente a zero

Definizione

f(x) tende a ℓ, per *x* che tende a $-\infty$ se $\forall \varepsilon>0 \ \exists \kappa(\varepsilon)>0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{per} \qquad \forall x < -\kappa$$

La retta y = 0 è un asintoto orizzontale per la funzione $f(x) = 2^x$ Esempio

Verificare che $f(x) = (1/2)^x$ tende a zero per *x* che tende a $+\infty$

L'operazione di limite per funzioni di una variabile

Definizione

f(x) tende a ℓ, per *x* che tende a + ∞ se $\forall\varepsilon>0$ $\exists\kappa(\varepsilon)>0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{per} \qquad \forall x > \kappa$$

Cioè risulta $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ per $\forall x > \kappa$

Definizione

f(x) tende a ℓ, per *x* che tende a x_0 se $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)>0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{per} \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Cioè risulta $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ per $\forall x,\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

L'operazione di limite - proprietà

Definizione

Date due funzioni, il limite della somma è uguale alla somma dei limiti

Se f(x) tende a ℓ_1, g(x) tende a ℓ_2 per *x* che tende a x_0 allora

$$\lim (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2 \qquad \text{per } x \text{ che tende a } x_0$$

Si ha il caso di forme di indecisione quando a $\ell_1 = \pm\infty$ $\ell_2 = \mp\infty$

Esempi. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-2^x + x\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\left(3x + x^2\right)$$

L'operazione di limite - proprietà

Definizione. Date due funzioni, il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti

Se f(x) tende a ℓ_1, g(x) tende a ℓ_2 , per *x* che tende a x_0 , allora

$$lim(f(x) \times g(x)) = \ell_1 \times \ell_2 \qquad \text{per } x \text{ che tende a } x_0$$

Si ha il caso di forme di indecisione quando a $\ell_1 = \pm\infty$ $\ell_2 = 0$ (o viceversa)

Definizione Date due funzioni, il limite del rapporto è uguale al rapporto dei limiti

Se f(x) tende a ℓ_1, g(x) tende a ℓ_2 , per *x* che tende a x_0 , allora

$$lim(f(x)/g(x)) = \ell_1 / \ell_2 \qquad \text{per } x \text{ che tende a } x_0$$

Si ha il caso di forme di indecisione quando a $\ell_1 = \pm\infty$ $\ell_2 = \pm\infty$
Oppure quando $\ell_1 = 0$ $\ell_2 = 0$

Funzioni e studio del grafico

Esempi

$f(x) = -(x+1)^2 + 2$

$h(x) = tgx$ $\qquad$ $w(x) = senx$

Determinare il dominio D, il segno delle funzioni

$\forall x \in D$ *, dire se sono crescenti, decrescenti in D*

Dire se il codominio è un intervallo aperto o chiuso, determinare un intervallo in cui f, h, h siano limitate.

L’operazione di limite - proprietà

Definizione

Date due funzioni, il limite della somma è uguale alla somma dei limiti

Se f(x) tende a ℓ_1, g(x) tende a ℓ_2 per *x* che tende a x_0 allora

lim(f(x) + g(x)) = $\ell_1 + \ell_2$ per x che tende a x_0

Si ha il caso di forme di indecisione, o indeterminate,
quando a $\ell_1 = \pm\infty$ $\ell_2 = \mp\infty$

Esempi. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-2^x + x\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x + x^2\right) = -\infty + \infty$$

Trasformare in modo da modificare ed eliminare la forma indeterminata

$$\lim_{x\to 2}\left(3x + x^2\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x + x^2\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(\frac{3}{x} + 1\right) = ?$$

Limite del prodotto?

L'operazione di limite - proprietà

Definizione. Date due funzioni, il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti

Se f(x) tende a ℓ_1, g(x) tende a ℓ_2, per *x* che tende a x_0, allora

$$\lim(f(x) \times g(x)) = \ell_1 \times \ell_2 \qquad \text{per } x \text{ che tende a } x_0$$

Si ha il caso di forme di indecisione quando a $\ell_1 = \pm\infty$ $\ell_2 = 0$ (o viceversa)

Definizione Date due funzioni, il limite del rapporto è uguale al rapporto dei limiti

Se f(x) tende a ℓ_1, g(x) tende a ℓ_2, per *x* che tende a x_0, allora

$$\lim(f(x)/g(x)) = \ell_1 / \ell_2 \qquad \text{per } x \text{ che tende a } x_0$$

Si ha il caso di forme di indecisione quando a $\ell_1 = \pm\infty$ $\ell_2 = \pm\infty$
Oppure quando $\ell_1 = 0$ $\ell_2 = 0$

L'operazione di limite - proprietà

Sia *c* $\in \Re$ **e** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **allora**

$$\lim_{x \to +\infty} \left(c + f(x)\right) = +\infty$$

$$se \quad c \neq 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} cf(x) = \begin{cases} +\infty & \mathrm{se} \quad c > 0 \\ -\infty & \mathrm{se} \quad c < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{f(x)} = 0$$

Le stesse proprietà valgono se sostituiamo a *c* una funzione *g(x)* che converge a *c* per *x* che tende a + ∞

Studiare il comportamento della funzione f(x) = $-2e^x$ agli estremi del dominio

L'operazione di limite - Esempi

Esempi. Studiare il grafico della funzione *f(x) = 1/x*
D **= $\Re \setminus \{0\}$ *o* *(-∞, 0) ∪ (0, +∞)***

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty} \left(3x + x^2\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(\frac{3}{x}+1\right) = ?$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(3x + x^2\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(\frac{3}{x}+1\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{x}+1\right) = 0+1=1$$

L'operazione di limite - Applicazioni

Esempi. Legge di raffreddamento

$$T(t) = T_E + (T_0 - T_E)e^{-at}$$

T(t) descrive come, al variare del tempo t, si raffredda (o si riscalda) un corpo di temperatura iniziale T_0 Immerso in un ambiente a temperatura fissata T_E , a>0

Calcolare ed interpretare il risultato del limite per $t \to \infty$

Sapendo che a = 1, T_E = 5°C, e T_0 = 20.5°C, il tempo è misurato in ore

Descrivere, disegnando il grafico, l'andamento della funzione e calcolare dopo quanto tempo la temperatura iniziale e quella dell'ambiente differiscono di 1 grado

L'operazione di limite – proprietà Velocità di convergenza, di divergenza

Siano f e g due funzioni divergenti (che convergono ad infinito per $x \to \pm\infty$). Allora per il limite del rapporto possiamo avere i seguenti casi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty \quad \text{si dice che } f \text{ è diverge più rapidamente di } g \text{ (ordine di infinito superiore)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \quad \text{si dice che } f \text{ è diverge meno rapidamente di } g \text{ (ordine di infinito inferiore)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0 \quad \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ divergono con la stessa velocità (stesso ordine di infinito)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \quad \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ divergono asintoticamente ad infinito}$$

L'operazione di limite – proprietà Velocità di convergenza, di divergenza

Esempi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x + x^2}{3x^2 + x^3} = 0$$

Osservazione. Si può estendere la definizione di velocità di convergenza al caso generale del

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Determinare due polinomi tali che il limite del rapporto sia uguale ad 1

Determinare due polinomi tali che il limite del rapporto sia uguale a $+\infty$

Velocità di convergenza, di divergenza

Confronto tra potenze, esponenziali, logaritmi

se $\beta_2 > \beta_1 > 0$ allora x^{β_2} converge piu rapidamente ad infinito di x^{β_1}

se $f(x) \to \infty$ più rapidamente di $g(x)$ allora

$e^{f(x)} \to \infty$ più rapidamente di $e^{g(x)}$, in particolare

se $c_2 > c_1$ allora, e^{c_2} diverge più rapidamente di e^{c_1}

Verificare se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{2x}}{e^x + e^{3x}} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2} - e^{2x}}{e^x + e^{3x}} = +\infty$$

Velocità di convergenza, di divergenza

Confronto tra potenze, esponenziali, logaritmi

Le funzioni esponenziali di esponente positivo divergono più rapidamente di ogni potenza, cioè

$$\text{se} \quad \beta > 0 \quad \text{e se} \quad c > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{cx}}{x^{\beta}} = +\infty \quad \text{o} \quad \text{equivalentemente} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\beta}}{e^{cx}} = 0$$

La funzione logaritmo diverge più lentamente di ogni potenza, cioè

$$\text{se} \quad \beta > 0 \quad \text{e se} \quad a > 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\beta}}{\log_a x} = +\infty \quad \text{o} \quad \text{equivalentemente} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^{\beta}} = 0$$

Operazione di limite e studio di funzione

Esempi. Studiare insieme di definizione e comportamento agli estremi delle seguenti funzioni.

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{2x^2}$$

$$g(x) = \frac{-3x + x^2}{3x^2 + x^3}$$

Osservazione: calcolare i limiti utilizzando le proprietà di infinito e infinitesimo

Derivata di una funzione

Data la funzione *f(x)* continua in un punto x_0 si dice che f è derivabile in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f\,'(x_0)$$

Esiste finito il limite del rapporto incrementale (tasso di variazione puntuale o istantaneo se f (t) , t indica la variabile tempo)

Si dice che la funzione *f(x)* è derivabile in un intervallo, o in tutto il suo dominio, se è derivabile in ogni punto dell'intervallo, o di tutto il dominio.

Se una funzione non è continua in un punto allora non è neanche derivabile nel punto

Se una funzione è derivabile in un punto allora è continua nel punto, non è vero il viceversa . Esempio : *f(x)* = | *x* |

Derivata di una funzione, significato geometrico

Data la funzione *f(x)* continua in un punto x_0 la derivata in x_0 , se esiste, è il numero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione (tangente alla curva) nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$

Nei punti di massimo o minimo locale la derivata prima, se esiste, è nulla.

Esempio. $f(x) = x^2$

Derivata di una potenza. $f(x) = \alpha x^\beta$, con $\alpha, \beta \in \Re$

$$f'(x) = (\alpha x^\beta)' = \frac{d}{dx}(\alpha x^\beta) = \alpha\beta x^{\beta-1}$$

$$f'(x) = (x^2)' = 2x$$

Derivata della somma di funzioni, crescenza e decrescenza della funzione

Date due funzioni *f(x)* e g(x), derivabili in I, allora la derivata della somma è uguale alla somma delle derivate

$$(f + g)' = f' + g' \qquad \forall x \in I$$

Data la funzione *f(x)* derivabile in un intervallo I

Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f(x) è crescente nell'intervallo I

Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I$, allora f(x) è decrescente nell'intervallo I

Esempio. Studiare il grafico $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Derivate delle funzioni elementari

La funzione derivata prima associa ad ogni punto di continuità della funzione f, se esiste, il valore della derivata calcolato nel punto

f'(x) : x $\rightarrow$ f'(x)

Date le funzioni elementari, applicando la definizione si possono determinare le Seguenti funzioni derivate:

$$f'(x) = (e^x)' = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (a^x)' = \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$(senx)' = \frac{d}{dx}(senx) = \cos x$$

$$(\cos x)' = \frac{d}{dx}(\cos x) = -senx$$

Derivate – proprietà e regole di derivazione

Derivata del prodotto di due funzioni

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Esempio: Calcolare la derivata di

$$g(x) = e^{x}\left(x^{3} - 2x + 1\right)$$

Derivata del rapporto di due funzioni

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^{2}(x)}$$

Esempio: Calcolare la derivata di

$$f(x) = \frac{e^{x}}{x}$$

Derivata di una funzione composta

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)$$

Esempio: Calcolare la derivata di

$$f(x) = e^{2x} \qquad g(x) = e^{x^{2}}$$

Derivabilità e continuità di una funzione in un punto

Se una funzione non è continua in un punto allora non è neanche derivabile nel punto.
Esempio. Studiare dominio, comportamento agli estremi
Continuità e derivabilità. Tracciare il grafico della funzione $f(x) = -\frac{2}{x+1}$

Se una funzione è derivabile in un punto allora è continua nel punto, non è vero il viceversa .
Esempio : *f(x)* = | *x* | è continua in tutto il suo dominio $\Re$. *f(x)* = | *x* | non è derivabile in *x* = *0*

$$\lim_{x \to 0^+} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Derivata e calcolo dei limiti

Considerate due funzioni derivabili, f(x) e g(x) tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Se esiste il limite del rapporto delle derivate, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio. Calcolare il limite applicando la regola (di De L'Hospital)

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Derivata e calcolo dei limiti

Considerate due funzioni derivabili, f(x) e g(x) tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Se esiste il limite del rapporto delle derivate, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Lo stesso risultato vale se f e g divergono per $x \to x_0$

E anche nel caso di f e g entrambe divergenti o entrambe infinitesimo per $x \to \infty$

Esempio. Calcolare il limite applicando la regola (di de L'Hospital)

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

Nell'ultimo caso si ha
una verifica dell'ordine
di infinito delle due funzioni

Derivate successive
Concavità - Punti di flesso

Se la funzione derivata prima di una funzione f è derivabile in un intervallo
La sua derivata si chiama derivata seconda di f e si indica con f'' (x)
Nelle stesse condizioni si può derivare la derivata seconda,
ottenendo la derivata terza di f

Data una funzione derivabile in un intervallo : f(x) ha la concavità verso l'alto negli intervalli del dominio in cui si ha f''(x) > 0
Verso l'alto negli intervalli in cui f''(x) < 0
I punti del grafico della funzione in cui cambia la concavità cambia si chiamano punti di flesso.
Esempio: studiare il grafico di

$$f(x) = x^3$$

Nei punti di flesso la derivata seconda è nulla, a derivata prima può essere maggiore, minore o uguale a zero (flesso a tangente orizzontale)

Derivata e problemi di massimo o minimo

Problema di ottimizzazione.

Data una lattina di forma cilindrica di altezza h, raggio di base r costituita di lamiera di alluminio di spessore fissato in modo che la quantità totale sia proporzionale alla superficie totale. Che proporzioni deve avere in modo che a parità di volume la quantità di alluminio utilizzata sia minima?

Dati $V = \pi r^2 h$ $\qquad S_{tot} = 2\pi r h + 2\pi r^2$ $\qquad$ da cui

$h = V/(\pi r^2)$ $\qquad S = 2\pi r V/(\pi r2) + 2\pi r^2$

Derivando S rispetto a r variabile, si ha il val minimo per S in corrispondenza di $r = (V/2\pi)^{1/3}$ che da in corrispondenza il valore di h=2r (altezza uguale al diametro di base)

Studio di funzione

Per studiare una funzione e determinarne il grafico, determinare:
Dominio e comportamento agli estremi
Derivata prima e punti di massimo, minimo locale
Flessi
Segno e zeri della funzione (anche come controllo sui dati raccolti e per verificare la coerenza degli elementi del grafico già determinati.

Studiare e determinare il grafico delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$N(t) = \frac{3000}{1 + e^{-2t}}$$

Legge logistica, descrive
la legge di crescita
in laboratorio
di una popolazione data
T = tempo misurato in giorni
N(t) = numerosità al variare del tempo