Corso di Laurea in Scienze Naturali
Esercizi proposti per la preparazione all'esame del 26 gennaio 2010
I Modulo di Matematica con elementi di statistica. Docente: Prof.ssa Maria Polo

Gli esercizi sono suddivisi secondo i temi principali affrontati durante il corso che saranno oggetto della prova scritta dell'esame. Alcuni degli esercizi riprendono gli esercizi svolti durante il corso; gli studenti sono invitati a risolvere anche tutti gli esercizi proposti durante il corso (si veda la sintesi delle slides delle lezioni messe a disposizione sul sito del Corso di Laurea). Tutti i quesiti proposti saranno corretti e commentati nelle ore di lezione ed esercitazioni in preparazione della prova scritta previste l'11, il 12 e il 15 gennaio 2010.

Teoria degli insiemi, numeri reali e operazioni

1. Risolvere la disequazione $\frac{x^2-1}{|x-1|}-x\le 0$ e determinare l'insieme $A=\left\{x : x\in\Re \ \text{ e } \ \frac{x^2-1}{|x-1|}-x\le 0\right\}$.
2. Dati gli intervalli $I_1=\left[-\sqrt{35},2\pi\right)$ e $I_2=\left[-6,\frac{25}{3}\right]$, determinare $I_1 \cap I_2$ e $C_{\Re} I_1$.
3. Dati gli insiemi $A=\left[-\sqrt{3},2\right)$ e $B=\left\{x : x\in\Re \ \text{ e } \ \sqrt{x^2-3x+2}\ge 2x\right\}$ determinare $A\cup B$
4. Dati i due insiemi $A_t = \{x : x \in R \wedge x(x^2+t)<0\}$ e $B = \{x : x \in R \wedge \ln(x-2{,}5) < 0\}$
   Determinare al variare di $t \in R$
   $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$
   Se $\exists\, t$, tale che $A_t \subset B$
5. Dire se sono intervalli aperti o chiusi
   $A = (-\infty, -3.25] \cap [-7, -3.3]$ e $B=\left(\sqrt{2}\ ,\ 3.5\overline{9}\right)\cap\left[1.5\ ,\ 3.6\right]$

Funzioni di una variabile reale

1. Studiare il grafico e le proprietà delle funzioni elementari.
2. Rappresentare graficamente le seguenti funzioni, indicando se sono pari, dispari, descrivendo eventuali simmetrie del grafico, intervalli di crescenza, decrescenza.

a. $f(x)=\left|\ |x+1|-5\ \right|$

b. $f(x)=(x+1)^3$

c. $f(t)=sen2t$

d. $f(v)=-v^2-5v+3$

3. Determinare le funzioni inverse delle seguenti funzioni.

a. $f(t)=\sqrt{3}t-0.5$
b. $g(t)=-e^{-2t}$
c. Date le funzioni $f(x)=\sqrt{3x+1}$ e $g(x)=\ln x$ determinare le funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$

Limiti.

Calcolare i seguenti limiti

a. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$

c. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$

d. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$

e. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^3\left(x-3x^2\right)}{\ln^3 x}$

f. $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-x-6}{\left(x^2-3\right)sen\left(x-2\right)}$

g. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$

Calcolo differenziale

1. Determinare la derivata prima ed eventuali punti di massimo o minimo locale delle seguenti funzioni
   a. $f(x) = -x^4 + 2x - x^2$
   b. $f(x) = \frac{-x^2+1}{x}$
   c. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$
   d. $f(x) = e^{2x-x^2}$
   e. $f(x) = arctg\frac{1}{x}$

Studio di funzione

1. Studiare il grafico e dire se la funzione è continua e derivabile in tutto il suo dominio
   a. $f(x) = \begin{cases} artcgx & se\ \ x \le 0 \\ \sqrt{x} & se\ \ x > 0 \end{cases}$
   b. $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & se\ \ x < 1 \\ -\lg x & se\ \ x \ge 1 \end{cases}$
   c. $f(t) = \begin{cases} e^{2t} & se\ \ x < 0 \\ t^3 + 2 & se\ \ x \ge 0 \end{cases}$

2. Studiare il dominio, comportamento agli estremi, intervalli di crescenza e decrescenza e tracciare il grafico delle seguenti funzioni

a. $f(x) = \dfrac{-x^2+1}{x}$

b. $f(x) = arctg\dfrac{1}{x}$

c. $f(t) = \dfrac{-5t+2}{6-\frac{2}{3}t}$

d. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Problemi e applicazioni.

1. Determinare il valore di W,

$$w = \frac{2{,}75(a-b)r^2}{m-n}$$

sapendo che $a = 3{,}7$

$b = -27{,}5$ $\quad r = 3$

$m = \sqrt{25}$ $\quad n = 2$

2. T(t) descrive come, al variare del tempo t, si raffredda (o si riscalda) un corpo di temperatura iniziale T_0 Immerso in un ambiente a temperatura fissata T_E , a>0

$$T(t) = T_E + (T_0 - T_E)e^{-at}$$

Calcolare ed interpretare il risultato del limite per $t \to \infty$
Sapendo che a = 1, T_E = 5°C, e T_0 = 20.5°C, il tempo è misurato in ore
Descrivere, disegnando il grafico, l'andamento della funzione e calcolare dopo quanto tempo la temperatura iniziale del corpo e quella dell'ambiente differiscono di 1 grado.

3. Legge logistica N(t) descrive la legge di crescita in laboratorio di una popolazione. Data la variabile indipendente t (t è il tempo misurato in giorni) N(t) esprime la numerosità della popolazione al variare del tempo. Studiare il grafico della funzione e determinare il valore della popolazione iniziale.

$$N(t) = \frac{3000}{1+e^{-2t}}$$

4. Data una lattina di forma cilindrica di altezza h, raggio di base r costituita di lamiera di alluminio di spessore fissato in modo che la quantità totale sia proporzionale alla superficie totale. Che proporzioni deve avere in modo che a parità di volume la quantità di alluminio utilizzata sia minima?

5. La percentuale dei semi, di una data pianta, che germogliano dipende dalla temperatura dell'ambiente. Per una data varietà di pomodoro è stato verificato che alla temperatura di 12°C germoglia il 40% dei semi, mentre alla temperatura di 15°C germoglia il 70% dei semi. Trovare, supponendo che sia espressa da una funzione lineare, la relazione tra la temperatura e la percentuale di semi germogliati (si veda l'esercizio svolto a lezione).

6. Un'ulteriore misurazione ha rilevato che alla temperatura di 9°C germoglia il 20% dei semi. Dimostrare che la relazione tra la temperatura *T* e la percentuale di semi che germoglia *P(T)* non può essere lineare. Supponendo che la relazione sia quadratica, cioè del tipo $aT^2 + bT + c = P(T)$ determinarla e tracciare il grafico. Determinare un intervallo I di definizione della variabile indipendente T, che descriva in modo realistico il fenomeno.