FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN. CORSO DI LAUREA IN SCIENZE NATURALI

II Modulo di Matematica con elementi di statistica.

Esercitazioni A.A. 2009.2010.

Tutor: Mauro Soro, p.soro@tin.it

Integrali definiti

Risolvere i seguenti integrali

1. $\int_0^2 (3x^2 + 2x - 1)dx$ $[10]$
2. $\int_0^1 (1 + 2x)^2 dx$ $\left[\frac{13}{3}\right]$
3. $\int_0^{\pi/2} (5\sin x + 4\cos x)dx$ $[9]$
4. $\int_{-2}^1 (x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})dx$ $\left[-\frac{39}{8}\right]$
5. $\int_0^{\pi} (\sin x - 3\cos x)dx$ $[2]$
6. $\int_{-1}^2 (-\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{2})dx$ $[2]$
7. $\int_0^{\frac{1}{2}} (4x + 1)^3 dx$ $[5]$

Calcolo aree

1. Calcolare l'area della regione del semipiano $x > 0$ delimitata dai grafici delle funzioni $f(x) = 5 - 2x$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$.
   $\left[\frac{16}{3}\right]$
2. Calcolare l'area della regione di piana delimitata dall'asse x e dall'arco di parabola $y = -x^2 + x + 2$ che sta al di sopra dell'asse.
   $\left[\frac{9}{2}\right]$

3. Calcolare la regione di piano delimitata dalla curva $y = \frac{1}{x}$, dalle rete $x = 2$ e $x = 3$ e dall'asse x.

   $\left[\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]$

4. Trovare l'area della regione di piano delimitata dalla parabola $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ e dalla retta $3x - 2y - 4 = 0$.

   $\left[\frac{1}{3}\right]$

5. Determinare l'area tra le curve $\varphi : y = x^2 - 3x + 2$ e $\psi : y = -x^2 + x + 2$.

   $\left[\frac{8}{3}\right]$

Integrazione per parti

1. $\int \ln x dx$ $\qquad [x \ln x - x + c]$
2. $\int x \sin x dx$ $\qquad [-x \cos x + \sin x + c]$
3. $\int x^2 \cos(2x) dx$ $\qquad \left[\frac{1}{2}x^2 \sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + c\right]$
4. $\int x \ln x dx$ $\qquad \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c\right]$

Successioni

Studiare il comportamento asintotico delle seguenti successioni:

1. $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ $\qquad [1]$
2. $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ $\qquad [1]$
3. $a_n = \frac{n+2}{n^2+3n}$ $\qquad [0]$
4. $a_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ $\qquad [+\infty]$

Serie

Calcolare la somma delle seguenti serie:

1. $s = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n$ $\left[\frac{7}{6}\right]$

2. $s = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ $[4]$

3. $s = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n$ $\left[\frac{5}{9}\right]$

4. $s = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$ $[+\infty]$

5. $s = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{7}{8}\right)^n$ $\left[\frac{8}{15}\right]$

6. $s = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$ $\left[\frac{9}{8}\right]$

Vettori

1. Moltiplicare il vettore $\vec{v} = (3, 2)$ per lo scalare $\lambda = 3$.

   $[(9, 6)]$

2. Moltiplicare il vettore $\vec{v} = (6, 4)$ per lo scalare $\lambda = \frac{1}{2}$.

   $[(3, 2)]$

3. Sommare il vettore $\vec{v} = (2, 3)$ con il vettore $\vec{w} = (4, 1)$.

   $[(6, 4)]$

4. Sommare il vettore $\vec{v} = (4, 2, 3, 5)$ con il vettore $\vec{w} = (7, 5, 4, 10)$.

   $[(11, 7, 7, 15)]$

5. Sottrarre il vettore $\vec{v} = (2, 3)$ dal vettore $\vec{w} = (4, 1)$.

   $[(2, -2)]$

6. Determinare il vettore combinazione lineare dei vettori $\vec{v} = (2,5)$ e $\vec{w} = (3,7)$ di coefficienti $\alpha = 4$ e $\beta = 2$.
   [(14, 34)]

7. Determinare il vettore combinazione lineare dei vettori $\vec{v} = (3,2,5)$ e $\vec{w} = (1,0,2)$ di coefficienti $\alpha = 3$ e $\beta = 4$.
   [(13, 6, 23)]

8. Calcolare il prodotto scalare tra il vettori $\vec{v} = (1,3)$ e il vettore $\vec{w} = (4,2)$.
   [10]

9. Calcolare il prodotto scalare tra il vettori $\vec{v} = (0,3,2)$ e il vettore $\vec{w} = (1,1,0)$.
   [3]

10. Calcolare il prodotto vettoriale tra il vettori $\vec{v} = (0,3,2)$ e il vettore $\vec{w} = (1,1,0)$.
    $[(-2, 2, -3)]$

11. Calcolare il prodotto vettoriale tra il vettori $\vec{v} = (1,0,5)$ e il vettore $\vec{w} = (2,1,2)$.
    $[(-5, 8, 1)]$

Matrici

Calcolare il prodotto tra le matrici

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}\right]$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 8 & 17 & 9 \\ 11 & 19 & 8 \end{pmatrix}\right]$

3. $\begin{pmatrix} 18 & 19 & 17 \\ 3 & 4 & 1 \\ 9 & 16 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 18 & 19 & 17 \\ 3 & 4 & 1 \\ 9 & 16 & 8 \end{pmatrix}\right]$

Calcolare l'inversa delle matrici

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}\right]$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\right]$

3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ [Non è invertibile]

Trovare autovalori e autovettori delle matrici

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

   $\left[\lambda_1 = \frac{7-\sqrt{21}}{2};\ \lambda_2 = \frac{7+\sqrt{21}}{2};\ v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{21}+3}{2} \\ 1 \end{pmatrix};\ v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{21}-3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   $\left[\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{2};\ \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2};\ v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{17}}{2} \\ 1 \end{pmatrix};\ v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = 1;\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix};\ \text{ammette un solo autovalore}\right]$

Sistemi

Risolvere i seguenti sistemi (nei sistemi di 2 equazioni usare anche Cramer e confrontare i risultati trovati):

1. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ $[x = 1;\ y = -1]$

2. $\begin{cases} -x + 3,5y = 1,7 \\ 7y = 3,4 + 2x \end{cases}$ [infinite soluzioni]

3. $\begin{cases} -x + 3,5y = 1,7 \\ 3x - 10,5y = 3,6 \end{cases}$ [nessuna soluzione]

4. $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x - 2y - 2z = 6 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$ [nessuna soluzione]

5. $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y + z - 1 \\ x = 2y - 2z + 3 \\ -x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$ $[x = \frac{5}{3};\ y = 4;\ z = \frac{14}{3}]$

6. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 6y - 3z = 3 \\ -5x + 10y + 5z = -5 \end{cases}$ [infinite soluzioni]

Calcolo combinatorio

1. Si calcoli il numero degli anagrammi che possono essere formati con le lettere della parola “cane”.

   [24]

2. Quante partite di scacchi diverse possono essere giocate da sei giocatori?

   [15]

3. Quanti numeri costituiti da cinque diverse cifre possono essere scritte utilizzando le cifre da 0 a 9?

   [252]

4. Quanti diversi incontri di pugilato possono essere organizzati da tra 7 pugili?

   [21]

5. Sei persone hanno ha disposizione sei sedie: in quanti modi diversi le possono occupare?

   [720]

6. Sei persone hanno a disposizione cinque sedie (quindi una di esse rimane in piedi!): in quanti modi diversi lo possono fare?

   [720]

7. Quanti diversi equipaggi possono occupare (indipendentemente dall’ordine) una barca a tre posti, scelti tra sette persone?

   [35]

8. Quanti anagrammi che iniziano con la lettera "m" possono essere composti con le lettere della parola "mela"?
   [6]

Probabilità

1. In un'urna ci sono cinque palline rispettivamente contrassegnate dai numeri 1, 2, 3, 4, 5; in un'altra urna ci sono cinque palline rispettivamente contrassegnate dai numeri 6, 7, 8, 9, 10. Si estrae una pallina da ciascuna urna. Trovare la probabilità che la somma dei numeri delle palline estratte sia:
   - A = minore di 7;
   - B = uguale a 11;
   - C = non maggiore di 11.

   $\left[P(A) = 1;\ P(B) = \frac{1}{5};\ P(C) = \frac{3}{5}\right]$

2. In una lotteria ci sono 1000 biglietti, 500 dei quali vincenti e 500 non vincenti. Acquistiamo due biglietti. Qual è la probabilità che essi siano entrambi vincenti?
   $\left[\frac{499}{1998}\right]$

3. Un'urna contiene 10 palline bianche, 15 nere, 20 blu e 25 rosse. Trovare la probabilità che una pallina estratta sia:
   - A = bianca o nera;
   - B = blu o rossa;
   - C = bianca o nera o blu.

$\left[P(A) = \frac{5}{14};\ P(B) = \frac{9}{14};\ P(C) = \frac{9}{14}\right]$

4. Si consideri l'estrazione di una carta da un mazzo di 52; determinare la probabilità dei seguenti eventi:

   - A = estrazione di una carta di fiori;
   - B = estrazione di una figura;
   - C = estrazione di una carta numero 8.

   Determinare anche la probabilità di: $A \cup B; A \cap B; A \cup C; A \cup B \cup C; A \cap B \cap C$.
   $\left[P(A) = \frac{1}{4};\ P(B) = \frac{3}{13};\ P(C) = \frac{1}{13};\ P(A \cup B) = \frac{11}{26};\ P(A \cap B) = \frac{3}{52};\ P(A \cup C) = \frac{4}{13};\ P(A \cup B \cup C) = \frac{25}{52};\ P(A \cap B \cap C) = 0\right]$

5. Un sacchetto contiene 10 gettoni numerati da 1 a 10; sene estraggono due con reintroduzione; si considerino i seguenti eventi:

   - A = prima estrazione numero minore di 4;
   - B = seconda estrazione numero minore di 4;
   - C = estrazione dello stesso numero due volte.

   Determinare la probabilità dei seguenti eventi: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$.
   $\left[P(A \cup B) = \frac{51}{100};\ P(A \cap B) = \frac{9}{100};\ P(A \cup B \cup C) = \frac{58}{100};\ P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{100}\right]$

6. Un'urna contiene 3 gettoni rossi, 5 gialli e 2 bianchi; si estrae un gettone, si osserva il colore, lo si rimette nell'urna e si

estrae un secondo gettone. Determinare la probabilità che i gettoni così estratti siano:

- A = uno rosso e uno giallo;
- B = dello stesso colore.

$\left[P(A) = \frac{3}{10};\ P(B) = \frac{19}{50}\right]$

7. Consideriamo l'estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte. Calcolare la probabilità degli eventi:

   - A = estrazione di una figura;
   - B = estrazione di una carta rossa.

   Calcolare la probabilità di A dato B e la probabilità di B dato A.
   $\left[P(A) = \frac{3}{13};\ P(B) = \frac{1}{2};\ P(A|B) = \frac{3}{13};\ P(B|A) = \frac{1}{2}\right]$

8. Presa un'urna con 20 palline numerate da 1 a 20. Si estragga una pallina. Verificare se i seguenti eventi sono indipendenti:

   - A = estrazione di un numero pari;
   - B = estrazione di un numero divisibile per tre.

   E se l'urna ha 21 palline invece di 20?
   [Con 20 palline A e B sono indipendenti; con 21 palline sono dipendenti]

Statistica

1. Si eseguono alcune misure di una grandezza X e si rilevano i seguenti risultati con le rispettive frequenze:

X	0	1,3	1,2	0,3	3,4	0,5	1,6	4,7	0,8	2,9
F	2	6	12	9	19	39	42	39	21	11

Calcolare la media, la varianza, la varianza campionaria, la deviazione standard, la deviazione standard campionaria, la moda e la mediana.

$\left[m = \frac{4,1}{2};\ \sigma^2 = 2,4974;\ s^2 = 2,51;\ \sigma = 1,5803;\ s = 1,5843;\right.$
$\left. moda = 1,6; mediana = 1,6\right]$

2. Determinare media aritmetica, varianza, deviazione standard, moda e mediana dei seguenti valori:
   10, 11, 10, 7, 12, 10, 9, 11.
   $\left[m = 10;\ \sigma^2 = 2;\ \sigma = \sqrt{2};\ moda = 10;\ mediana = 10\right]$

3. Determinare media aritmetica, varianza, deviazione standard, moda e mediana dei seguenti valori:
   106, 111, 113, 98, 120.
   $[m = 109,6;\ \sigma^2 = 53,84;\ \sigma = 7,34;\ moda = \text{non esiste};\ mediana = 111]$

4. Determinare media aritmetica, varianza, deviazione standard, moda e mediana dei seguenti valori:
   42, 42, 47, 48, 42, 49, 48, 43, 47, 47, 41, 41, 47, 42.
   $[m = 44,71;\ \sigma^2 = 7,06;\ \sigma = 2,66;\ moda = 47;\ mediana = 45]$

5. Viene effettuato un test di durata su un campione casuale di 100 lampadine a incandescenza. I dati vengono raggruppati in classi secondo le seguente tabella:

T	(0;2.5)	(2.5;5)	(5;7.5)	(7.5;10)	(10;12.5)	(12.5;15)
F	8	27	15	17	27	6

con la durata T misurata in centinaia di ore. Calcolare la durata media delle lampadine del campione, la deviazione standard e la deviazione standard campionaria, moda e mediana.
[$m = 7,4$; $\sigma^2 = 13,55$; $s^2 = 13,69$; $\sigma = 3,68$; $s = 3,70$;
$moda =\ 3,75 \,\text{e}\, 11,25$; $mediana = 7,5$]

6. Consideriamo i dati di una popolazione a due variabili

X	1	2	3	0	4	3
Y	2	3	3	1	2	4

con medie $m_X = \frac{13}{6}$ e $m_Y = \frac{5}{2}$. Calcolare la covariante, la covariante campionaria e il coefficiente di correlazione.
$\left[\sigma_{xy} = \frac{3}{4};\ s_{xy} = \frac{9}{10};\ \rho_{xy} = 0,45\right]$

7. Consideriamo i dati di una popolazione a due variabili

X	3	0	1	4	2	0
Y	1	1	3	1	0	4

con medie $m_X = \frac{5}{3}$ e $m_Y = \frac{5}{3}$. Calcolare la covariante, la covariante campionaria e il coefficiente di correlazione.
$\left[\sigma_{xy} = -\frac{10}{9};\ s_{xy} = -\frac{4}{3};\ \rho_{xy} = -\frac{9}{34}\right]$