Corso di Laurea in Scienze Naturali
Esercizi proposti per la preparazione all'esame
II Modulo di Matematica con elementi di statistica. Docente: Prof.ssa Maria Polo

Gli esercizi sono suddivisi secondo i temi principali affrontati nel secondo modulo del corso che saranno oggetto della prova scritta dell'esame. Alcuni degli esercizi riprendono gli esercizi svolti durante il corso; gli studenti sono invitati a risolvere anche tutti gli esercizi proposti durante il corso e nelle esercitazioni tenute dal tutor (si vedano anche la sintesi delle slides delle lezioni e gli esercizi proposti dal tutor messi a disposizione sul sito del Corso di Laurea). Tutti i quesiti proposti saranno corretti e commentati nelle ore di esercitazione in preparazione della prova scritta previste il 24 e 25 maggio 2010.

Date esami parziali: 3 giugno ore prova parziale I modulo – 8 giugno prova parziale II modulo. Esame: 23 giugno e 13 luglio. Gli studenti che avessero superato solo uno dei due parziali saranno ammessi al recupero della sola parte non superata.

A. Primitiva e Integrale di funzioni in una variabile

1. Calcolare i seguenti integrali (per gli integrali d. e. determinare un intervallo [a,b] in cui la funzione sia integrabile)
   a. $\int_{-3}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,dx$
   b. $\int_{2}^{\sqrt{6}} (3x+1)x\,dx$
   c. $\int_{2}^{\pi} (x+1)\,senx\,dx$
   d. $\int \frac{1}{x}\,dx$
   e. $\int \sqrt{2x-1}\,dx$

2. Determinare l'area delle seguenti regioni piane delimitate dalle curve e dalle rette assegnate
   a. $f(x) = x^2 + 2x + 1 \qquad f(x) = x + 1$
   b. $f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad x = -1 \qquad x = -\frac{8}{3}$

B. Successioni e serie

1. Scrivere i primi 6 termini, rappresentarli su un grafico e calcolate il limite delle seguenti successioni
   a) $a_n = \ln \frac{1}{n+1}$
   b) $a_n = \frac{n-1}{n^2+1}$
   c) $a_n = \sqrt{\frac{n^3-1}{n^2-1}}$

2. Determinare i primi 20 termini delle seguenti successioni e rappresentarli su un grafico
   a) $a_n = 0.5 \cdot a_{n-1} \qquad \text{con } a_0 = 1$
   b) $a_n = 0.2 \cdot a_{n-1}(1 - a_{n-1}) \qquad \text{con } a_0 = 2$
   c) $a_n = \frac{a_{n-1} + \left(1 - \frac{a_{n-1}}{100}\right)}{a_{n-1}} \qquad \text{con } a_0 = 10$

3. Determinare i termini delle seguenti serie per n da 1 a 5. Stabilire se le serie sono convergenti e se esiste finita, calcolare la somma

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{5}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{6}\right)^{-n}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2e}{3}\right)^n$

C. Vettori, Matrici

1. Dati i seguenti vettori e scalari, calcolare il modulo, la somma, il prodotto per lo scalare, il prodotto vettoriale e dire se i vettori sono perpendicolari, paralleli o individuano direzioni qualunque.

a) $\mathrm{v}=(1{,}6)$ $\quad \mathrm{w}=(0,\text{-}3)$ e $\lambda=\sqrt{\frac{1}{9}}$

b) $\mathrm{v}=(-1{,}2)$ $\quad \mathrm{w}=(5,\text{-}0)$ e $\lambda=-2$

c) $\mathrm{v}=(3,-12)$ $\quad \mathrm{w}=(1,\text{-}4)$ e $\lambda=\sqrt{2}$

2. Date le seguenti matrici, determinare, se esistono, la somma, il prodotto per lo scalare, il prodotto righe per colonne, il determinate

a) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -\frac{2}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\lambda=\sqrt{\frac{1}{9}}$

b) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0.5 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 0.5 & 2.3 & 0.1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\lambda=\sqrt{4}$

3. Determinare gli autovalori e gli autovettori delle matrici $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 10^{-2} & 10^{-1} \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

D. Sistemi

1. Determinare le soluzioni, se esistono, dei seguenti sistemi dati in forma vettoriale

a) $Ax=b$ con $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $b=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $Ax=b$ con $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ e $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Discutere al variare di k $\in\Re$ le soluzioni dei seguenti sistemi

a) $\begin{cases} x-(k-1)y=0 \\ kx-2(k-1)y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-(k-2)y=1 \\ x-2(k+1)y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} kx-(k-2)y=2 \\ x-(k-1.5)y=2.5 \end{cases}$

E. Elementi di combinatoria e calcolo delle probabilità

1. Determinare quanti e quali numeri diversi possono essere scritti con le cifre, tutte diverse, 2 7 5 e calcolare la probabilità dell'evento "si forma il numero 275 o il numero 752"
2. Dati i seguenti valori delle probabilità di due eventi incompatibili S e I, P(S) = 0.02 e P(I) = 0.98, determinare la probabilità che in 4 prove indipendenti; nelle quali la probabilità di S e di I si mantiene invariata, S si verifichi 0, 1, 2, 3 o 4 volte. Ordinare in modo decrescente i valori ottenuti.
3. Detta X la variabile aleatoria che conta in quanti casi si verifica S si ha
    a. $P(\mathrm{X}=0)=\binom{4}{0}0.02^{0}\cdot 0.98^{4}=$

F. Elementi di Statistica descrittiva e inferenziale

1. Calcolare la moda, la media e la mediana del seguente insieme di dati, e rappresentare l'istogramma delle frequenze, individuando la posizione di tali valori
    a) Insieme dei nati in cattività in due anni di una specie in estinzione

6	7	7	5	8	5	4	7	5	6
5	6	6	6	5	7	5	5	8	3
2	4	7	0						

2. Calcolare la moda, la media e la mediana del seguente insieme di dati, e rappresentare l'istogramma delle frequenze, individuando la posizione di tali valori
    a) Esempi del testo di riferimento da 12.9 a 12.16
    b) Esercizi del testo di riferimento 12.2; 12.8; 12.9
3. Calcolare e rappresentare graficamente la retta di regressione lineare assegnati i valori delle variabili X e Y
    a. Esercizi del testo di riferimento 12.17 e 12.18
    b. Calcolare la retta di regressione lineare per i seguenti valori di media, varianza e covarianza delle variabili X e Y e individuare almeno due punti che approssimino potenziali valori delle variabili X e Y.
    c. $m_X=\frac{7}{4}\quad m_Y=\frac{9}{8}\quad \sigma_X^2=\frac{35}{16}$ e $\sigma_{XY}=\frac{105}{32}$
4. Rappresentare i punti corrispondenti ai dati, determinare la retta di regressione e stabilire la dipendenza delle variabili

a)

X	1	6	2	4
Y	2	1	3	0

a)

X	0	1	3	4
Y	0	3	6	12

a)

X	10	60	25	100
Y	200	10	50	20

G. Problemi e applicazioni.

1. Esercizio 3.7 pag. 136 testo di riferimento
2. Esercizio 7.17 pag 294 (prima domanda) testo di riferimento
3. Si vuole formulare un modello empirico che descriva il numero di foglie di una pianta al variare del tempo. Una volta alla settimana si contano le foglie della pianta e si ottengono i dati seguenti dati relativi a 5 settimane consecutive

   $$f_1 = 14 \qquad f_2 = 36 \qquad f_3 = 76 \qquad f_4 = 140 \qquad f_5 = 234$$

   Qual è il numero medio di foglie rilevato nelle 5 settimane?

   Se la funzione, dove t è il tempo misurato in settimane, descrive l'andamento della crescita delle foglie, calcolare la media della funzione nel periodo di osservazione e determinare il tempo t che corrisponderebbe al momento in cui il numero delle foglie nate si avvicina approssimativamente a tale media.
4. Un recente studio mostrerebbe che nel 2% dei pazienti trattati con un nuovo farmaco per curare disturbi da deficit dell'attenzione, sono state evidenziate come effetti secondari gravi forme di emicrania. Se si utilizza il farmaco su 10 individui scelti a caso, qual è la probabilità che nessun paziente abbia effetti secondari o che un solo paziente abbia effetti secondari?
5. Incrociando piante da due linee pure " a fiore rosso" e a "fiore bianco" si ha il seguente dato osservativo 705 piante a fiore rosso e 224 a fiore bianco. Verificare se i dati ottenuti sono in accordo con l'ipotesi nulla che la probabilità di ottenere piante a fiore rosso sia ¾ e quella di ottenere piante a fiore bianco sia ¼.
6. Esempi da 12.31 a 12.32 nel testo di riferimento
7. Esercizi da 12.6 a 12.9 e da 12.13 a 12.15 nel testo di riferimento

Testo di riferimento

1. D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, Matematica per le scienze della vita, Ambrosiana, 2008