LAUREA IN SCIENZE NATURALI (CLASSE L-32)
Matematica con elementi di statistica

LAUREA IN SCIENZE GEOLOGICHE (CLASSE L-34)
Matematica e statistica

Lezioni del I semestre – A.A. 2012/2013

(II parte) – I Modulo - 5 crediti

VIII Lezione 06.11.12

Docente Maria Polo
Dipartimento di Matematica e Informatica,
Via Ospedale 72 - Cagliari

e-mail: mpolo@unica.it tel 070 675 8528

Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Grandezze **scalari: descritte da un numero,**
Volume, temperatura, tempo, peso, posizione di un punto su una retta

Grandezze **vettoriali: descritte da un numero, da una direzione e da un verso**
Distanza di un punto dall'origine, velocità, forza

Nel caso generale
Un **vettore v** è una grandezza caratterizzata da:
- **modulo (o ampiezza, o lunghezza)**
- **direzione**
- **verso**

Un **vettore v** è spesso indicato con il simbolo $\vec{V}$

Dal punto di vista algebrico il vettore che indica lo spostamento OP, si esprime assegnando lo spostamento x sull'asse delle X e lo spostamento y sull'asse delle Y

$\vec{V}$ **= V** = *(x, y)* vettore **v dello spazio a due dimensioni** di componenti x e y . Esempio **V** = *(3, 2)*

Vettori. Definizione algebrica

Un vettore **v** nello spazio n-dimensionale $\Re^n$, *con n = 1, 2, 3,* ……. è una qualsiasi sequenza di numeri reali

$$\mathrm{v} = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots, v_n) \qquad v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots$$ sono dette componenti del vettore

Esempi. Il vettore nullo è il vettore costante le cui componenti sono nulle
Dati tre punti del piano (o di $\Re^2$) P = (2, 1), Q = (1,2), R = (3,3) individuare i segmenti orientati OP e QR

Il punto P può essere individuato come estremo del segmento orientato OP (che si individua considerando a partire dall'origine O, del sistema di riferimento, lo spostamento di 2 unità verso destra e di 1 unità verso l'alto). In modo analogo si può determinare il segmento orientato QR (l'estremo R si individua partendo dal punto Q considerando lo spostamento di 2 unità verso destra e di 1 unità verso l'alto)
Il punto di partenza è diverso ma lo spostamento è lo stesso: viene così individuato e definito un unico vettore **V** = *(2, 1)*

Modulo, direzione e verso non variano.

Esercizio. Determinare tre punti del piano che individuino lo spostamento corrispondente al vettore

$$\vec{v} = (3, -2)$$

Vettori. Determinazione del Modulo

Un vettore **v** nello spazio n-dimensionale $\Re^n$, *con n = 1, 2, 3,* ……. è una qualsiasi sequenza di numeri reali

$$\mathrm{v} = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots, v_n)$$

$v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots$ sono dette componenti del vettore

Il **modulo** del **vettore v** (o lunghezza) $$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots. + v_n^2}$$

Esempi. In $\Re^3$ consideriamo il vettore v = (1, 2, 3). Rappresentare il vettore e calcolare il modulo

Verificare che il modulo del vettore v = (1, 2, 3) esprime la distanza di P = (1,2,3) dall'origine.

Detta H la proiezione di P sul piano XY, A la proiezione di H sull'asse X e B la proiezione di H sull'asse Y, la distanza PO è data da

$$|PO| = \sqrt{|OH|^2 + |PH|^2} = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2 + |PH|^2}$$

Vettori. Operazioni con i vettori

Moltiplicazione per uno scalare.
Il prodotto di un vettore **v,** dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, con n = 1, 2, 3, ……. , per uno scalare $\gamma \in \Re$, è **il vettore** che si ottiene moltiplicando tutte le componenti del vettore per γ.

Il vettore $\gamma \mathrm{v} = (\gamma v_1, \gamma v_2, \ldots\ldots, \gamma v_n)$ ha la stessa direzione di v, lo stesso verso se $\gamma > 0$,

verso opposto se $\gamma < 0$.
Il modulo (o lunghezza) di γv è dato dal prodotto $|\gamma \mathrm{v}| = |\gamma| \cdot |\mathrm{v}|$

Un **vettore di modulo 1 si chiama versore**

Dato il vettore **v** , con **v ≠ 0**, il vettore $\hat{\mathrm{v}} = \frac{1}{|\mathrm{v}|}\mathrm{v}$

è il **versore** che esprime la direzione e il verso di **v**

Esempi. I versori corrispondenti alle direzioni e verso degli assi cartesiani sono
In $\Re^2$: $e_x = (1,0)$ $e_y = (0,1)$ In $\Re^3$ $e_x = (1,0.0)$ $e_y = (0,1.0)$ $e_z = (0,0,1)$

Vettori. Operazioni con i vettori

Moltiplicazione per uno scalare.
Il prodotto di un vettore **v,** dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, con n = 1, 2, 3, ……. , per uno scalare $\gamma \in \Re$, è **il vettore** che si ottiene moltiplicando tutte le componenti del vettore per γ.

Il vettore $\gamma v = (\gamma v_1, \gamma v_2, \ldots\ldots, \gamma v_n)$ ha la stessa direzione di v, lo stesso verso se $\gamma > 0$,

verso opposto se $\gamma < 0$.
Il modulo (o lunghezza) di γv è dato dal prodotto $|\gamma v| = |\gamma| \cdot |v|$

Esercizio. Calcolare il prodotto per v (-2, 5), $\gamma = 2$ e $\gamma = 1/2$
Verificare che il prodotto ha come effetto una dilatazione o un rimpicciolimento lungo la stessa direzione e con lo stesso verso.

Applicare l'uguaglianza nei due casi e verificare che $\left|\frac{1}{2}v\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \cdot |v|$ e $|-2v| = |-2| \cdot |v|$

Vettori. Operazioni con i vettori

Somma.

La somma di due vettori **v, u** dello spazio a due dimensioni è il vettore che ha per componenti la somma delle componenti . Scrivere il vettore somma di

$$\mathrm{v}=(v_1,v_2) \qquad \mathrm{u}=(u_1,u_2) \qquad \mathrm{w}=? \qquad \mathrm{w}=(v_1+u_1,v_2+u_2)$$

Nel caso generale di vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, la somma di due vettori

$$\mathrm{v}=(v_1,v_2,\ldots\ldots,v_n) \qquad \mathrm{u}=(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n)$$

è il vettore

$$\mathrm{w}=(v_1+u_1,v_2+u_2,\ldots\ldots\ldots,v_n+u_n)$$

Esempi. Determinare il vettore somma dei vettori *v = (2,1)* *u = (1,3)* *e* *v = (3,-2)* *u = (-1, -2)*

Rappresentazione grafica. La regola del parallelogramma permette di determinare il vettore somma che corrisponde alla diagonale del parallelogramma (dall’origine comune dei due vettori al vertice opposto)

Vettori. Operazioni con i vettori

Differenza.

La differenza di due vettori **v - u** dello spazio $\Re^n$ è il vettore che si ottiene sommando il primo con l'opposto dell'altro **w = v + (-1)u**

Se P e Q sono due punti di $\Re^n$, il vettore differenza che si ottiene sottraendo le coordinate esprime lo spostamento da P a Q e il modulo è la distanza PQ

$$\mathrm{P} = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n) \qquad \mathrm{Q} = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$$

$$\mathrm{w} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots\ldots\ldots u_n - v_n)$$

$$|\,\mathrm{w}\,| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots\ldots + (u_n - v_n)^2}$$

Esempi.

Determinare il vettore differenza dei vettori *v = (2,1)* *u = (1,3)* *e* *v = (3,-2)* *u = (-1, -2) .*
Rappresentare graficamente il vettore differenza e calcolarne il modulo

Vettori. Operazioni con i vettori

Combinazione lineare.

Dati due vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ dello spazio $\Re^n$
e due numeri reali γ_1 e γ_2 il vettore

$$\gamma_1 \mathrm{v}_1 + \gamma_2 \mathrm{v}_2$$

Si chiama combinazione lineare di coefficienti γ_1 e γ_2 dei due vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$

Nel caso generale di vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, e per qualunque k la combinazione lineare di k vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ …… $\mathbf{v_k}$, di coefficienti γ_1 , γ_2 …….. γ_k **è il vettore**

$$\mathrm{w} = (\gamma_1 \mathrm{v}_1 + \gamma_2 \mathrm{v}_2 + \ldots\ldots + \gamma_k \mathrm{v}_k) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \mathrm{v}_i$$

Esempi. Determinare il vettore combinazione lineare dei vettori ***v*** = *(2,1)* ***u*** = *(1,3)* di coefficienti

γ_1 = -1/2 γ_2 = -1/3

Vettori. Operazioni con i vettori. Combinazione lineare, Baricentro e media pesata

Baricentro.

Dati k punti materiali P_i, di massa m_i, individuati dai vettori di posizione in R^3 $P_i = (x_i, y_i, z_i)$

detta M la massa totale $$M = \sum_{i=1}^{k} m_i$$

Il baricentro (centro di massa) è il vettore dato da

$$B = \left(\frac{m_1}{M} P_1 + \frac{m_2}{M} P_2 + \ldots\ldots + \frac{m_k}{M} P_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{M} P_i = \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{m_i}{M} x_i, \sum_{i=1}^{K} \frac{m_i}{M} y_i, \sum_{i=1}^{K} \frac{m_i}{M} z_i \right)$$

Esempio. Determinare il baricentro dei punti $P_1 = (1/2, 0)$, di massa $m_1 = 4$, $P_2 = (0,1)$, di massa $m_2 = 1$, $P_3 = (1, 0)$, di massa $m_3 = 2$, $P_4 = (1,1)$, di massa $m_1 = 3$,

Cioè il vettore combinazione lineare dei vettori
$\boldsymbol{v_1} = (1/2,0)$ $\boldsymbol{v_2} = (0,1)$……. di coefficienti rispettivamente m_i/M

Vettori. Operazioni con i vettori. Combinazione lineare e media pesata

Media e media pesata.

Dati due punti P_1 e P_2, sulla retta il **punto medio** (baricentro dei punti materiali con massa 1) rappresenta **la media aritmetica**

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_i}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

La media aritmetica per k punti (o k numeri) è data da

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}$$

Esempio.
Scrivere i vettori che rappresentano i voti nei due esami e determinare il vettore che esprime la media dei voti riportati agli esami

		Studenti		
$\mathbf{v_i}$	**Esami**	$\mathbf{S_1}$	S_2	S_3
V_1	I Modulo (5 crediti)	20	24	28
V_2	II Modulo (4 crediti)	28	30	24
V_3				
…..				
v_k				

Vettori. Operazioni con i vettori. Combinazione lineare e media pesata

Media e media pesata.

La media aritmetica per n punti (o n numeri) è data da

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}$$

La media pesata (baricentro, combinazione lineare di vettori con coefficienti diversi tra loro, da zero, e non tutti uguali a 1) si utilizza quando il fenomeno riguarda numeri (i dati) che hanno *peso diverso. Ed è data dal vettore combinazione lineare dei vettori assegnati e con coefficienti uguali al rapporto tra peso di ciascun numero e peso totale peso.*

Esempio.
Determinare il vettore che esprime la media pesata dei voti riportati agli esami che tenga conto dei crediti di ciascun esame

$$M_p = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{p_1}{P} x_i , \sum_{i=1}^{k} \frac{p_1}{P} y_i , \sum_{i=1}^{k} \frac{p_1}{P} z_i \right)$$

$$M_p = \left(\frac{5 \cdot 20 + 4 \cdot 28}{9} , ?, ? \right)$$

		Studenti		
v_i	**Esami**	**S_1**	S_2	S_3
V_1	I Modulo (5 crediti)	20	24	28
V_2	II Modulo (4 crediti)	28	30	24

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto scalare (o prodotto interno).
Dati due vettori **v, u** dello spazio a due dimensioni **il prodotto scalare è un numero** (uno scalare) definito da (la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti)

$$\mathrm{v}=(v_1, v_2) \qquad \mathrm{u}=(u_1, u_2) \qquad \mathrm{v}\cdot\mathrm{u}=(v_1 u_1 + v_2 u_2)$$

Nel caso generale di due vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, il prodotto scalare di

$$\mathrm{v}=(v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n) \qquad \mathrm{u}=(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$$

è il numero

$$\mathrm{v}\cdot\mathrm{u}=(v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots\ldots + v_n u_n) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} v_k u_k$$

Esempi.
Determinare il prodotto scalare dei vettori *v = (2,1)* *u = (1,3)* *e* *v = (3,-2)* *u = (-1, -2)*

Vettori. Operazioni con i vettori

Combinazione lineare.

Dati due vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ dello spazio $\Re^n$
e due numeri reali γ_1 e γ_2 il vettore

$$\gamma_1 \mathrm{v}_1 + \gamma_2 \mathrm{v}_2$$

Si chiama combinazione lineare di coefficienti γ_1 e γ_2 dei due vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$

Nel caso generale di vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, e per qualunque k la combinazione lineare di k vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ …… $\mathbf{v_k}$, di coefficienti γ_1 , γ_2 …….. γ_k **è il vettore**

$$\mathrm{w} = (\gamma_1 \mathrm{v}_1 + \gamma_2 \mathrm{v}_2 + \ldots\ldots + \gamma_k \mathrm{v}_k) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \gamma_i \mathrm{v}_i$$

Esempi. Determinare il vettore combinazione lineare dei vettori ***v*** = *(2,1)* ***u*** = *(1,3)* di coefficienti $\gamma_1 = -1/2$ $\gamma_2 = -1/3$

Ogni vettore è ottenibile come combinazione lineare dei versori degli assi

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto scalare (o prodotto interno).
Dati due vettori **v, u** dello spazio a due dimensioni **il prodotto scalare è un numero** (uno scalare) definito da (la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti)

$$\mathrm{v}=(v_1,v_2) \qquad \mathrm{u}=(u_1,u_2) \qquad \mathrm{v}\cdot\mathrm{u}=(v_1u_1+v_2u_2)$$

Nel caso generale di due vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, il prodotto scalare di

$$\mathrm{v}=(v_1,v_2,.....,v_n) \qquad \mathrm{u}=(u_1,u_2,.....,u_n)$$

è il numero

$$\mathrm{v}\cdot\mathrm{u}=(v_1u_1+v_2u_2+......+v_nu_n)=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} v_k u_k$$

Esempi.
Determinare il prodotto scalare dei vettori *v = (2,1)* *u = (1,3)* *e* *v = (3,-2)* *u = (-1, -2)*

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto scalare (o prodotto interno) e interpretazione geometrica
Dati due vettori **v, u il prodotto scalare è il numero** corrispondente al prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso tra le loro direzioni

Nel caso generale di due vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, il prodotto scalare di

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots.., v_n) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots.., u_n)$$

è il numero

$$\mathrm{v} \cdot \mathrm{u} = |\mathrm{v}| \cdot |\mathrm{u}| \cos\alpha$$

Importante conseguenza
Due vettori u e v sono ortogonali se e solo se il prodotto scalare è nullo

Dimostrazione
Siano **u ≠ 0 e v ≠ 0** ortogonali, ⇒ *cos*$\pi/2 = 0$ e quindi per la proprietà di annullamento del prodotto il prodotto scale è nullo.
Se, invece il prodotto scalare è nullo, allora deve essere *cos*$\alpha = 0$ *e quindi* $\alpha = + \pi/2$ *oppure* $\alpha = - \pi/2$ *cioè i due vettori sono perpendicolari*

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto scalare (o prodotto interno) e interpretazione geometrica
Dati due vettori **v, u il prodotto scalare è il numero** corrispondente al prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso tra le loro direzioni

Nel caso generale di due vettori dello spazio n-dimensionale $\Re^n$, il prodotto scalare di

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n) \qquad \mathrm{v}\cdot\mathrm{u} = (v_1 u_1 + v_2 u_2)$$

è il numero

$$\mathrm{v}\cdot\mathrm{u} = |\mathrm{v}|\cdot|\mathrm{u}|\cos\alpha$$

Importante conseguenza
Due vettori u e v sono ortogonali se e solo se il prodotto scalare è nullo

Esempi
Calcolare il prodotto scalare dei vettori **u** = (2, 1,0) e **v** = (5, -1, 2). Determinare due vettori ortogonali e verificare che il loro prodotto scalare è nullo
Per quale valore di *a* i vettori v = (3 *a*, 1) e v = (2, -1- *a*) sono ortogonali?

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto scalare e proiezioni ortogonali

Dati due vettori **v, u** α l' angolo compreso tra le loro direzioni e **û** il versore di **u**

il numero $$\mathrm{v}\cdot\hat{\mathrm{u}} = |\mathrm{v}|\cdot|\hat{\mathrm{u}}|\cos\alpha = |\mathrm{v}|\cos\alpha$$

è l'ascissa della proiezione del vettore **v** lungo la retta individuata dalla direzione di **u**

Essendo il modulo del versore uguale ad 1

Il vettore $$(\mathrm{v}\cdot\hat{\mathrm{u}})\hat{\mathrm{u}}$$ prodotto di uno scalare per un vettore

è il vettore proiezione ortogonale di v lungo **û** cioè lungo la direzione di **u**

Esempi

Determinare le proiezioni ortogonali d dei vettori $\mathbf{w_1}$ = (0, 3), $\mathbf{w_2}$ = (1, 1), $\mathbf{w_3}$ = (2, -1), lungo la direzione del vettore **v** = (2, 1) ; determinare un vettore $\mathbf{w_4}$ con la stessa proiezione ortogonale di $\mathbf{w_1}$ lungo la direzione di **v**

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto vettoriale in R³

Dati due vettori **v, u** $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$

il prodotto vettoriale v x u è il vettore dato da

$$\mathrm{v} \times \mathrm{u} = (v_2 u_3 - v_3 u_2, v_3 u_1 - v_1 u_3, v_1 u_2 - v_2 u_1) = \mathrm{v} \wedge \mathrm{u}$$

Il prodotto vettoriale è antisimmetrico $\mathrm{v} \times \mathrm{u} = -\mathrm{u} \times \mathrm{v}$

Esempi
Verificare che il prodotto vettoriale dei vettori u = (2, 1,0) e v = (5, -1, 2) è antisimmetrico

il vettore che si ottiene come prodotto vettoriale di due vettori ha le seguenti proprietà:

Il modulo del vettore è dato da $|\mathrm{v} \times \mathrm{u}| = |\mathrm{u}||\mathrm{v}| \sin\alpha$ con α angolo tra **v** e **u**

Vettori. Operazioni con i vettori

Prodotto vettoriale

Dati due vettori **v, u** $\quad \mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3) \qquad \mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$

il prodotto vettoriale v x u è il vettore w dato da

$$\mathrm{w} = \mathrm{v} \times \mathrm{u} = (v_2 u_3 - v_3 u_2, v_3 u_1 - v_1 u_3, v_1 u_2 - v_2 u_1) = \mathrm{v} \wedge \mathrm{u}$$

il vettore **w** che si ottiene come prodotto vettoriale di due vettori ha le seguenti proprietà:

1. Il modulo del vettore è dato da $|\mathrm{v} \times \mathrm{u}| = |\mathrm{u}||\mathrm{v}| \sin\alpha$ con α angolo tra **v** e **u**
2. La direzione del vettore **v** x **u** coincide con la direzione perpendicolare al piano individuato da **v** e **u**
3. Il verso coincide con quello determinato dalla **regola della mano destra** : si posizionano le prime tre dita in modo che ciascuno sia perpendicolare agli altri due, poi si punta il pollice secondo direzione e verso del vettore **v,** l'indice in quello del vettore **u , il medio indica il verso del vettore prodotto w = v** x **u**
   (guardando dalla freccia di **w = v x u** vediamo il vettore **v** ruotare in senso anti-orario verso **u**)

Vettori. Rette, piani e sistemi di equazioni

Due rette sono parallele se e solo se hanno la stessa direzione

Le rette di equazioni $px + qy = k \quad \text{e} \quad p'x + q'y = k'$

sono parallele se i vettori (p, q) e (p', q') sono allineati cioè se (p, q) = λ (p', q') , con λ un opportuno numero reale

Un sistema lineare in due equazioni e due incognite (2 x 2) ha la seguente forma

$$\begin{cases} px + qy = k \\ p'x + q'y = k' \end{cases}$$

Perché il sistema abbia una soluzione deve esistere una coppia ordinata (x, y) che verifica contemporaneamente le due equazioni. La coppia rappresenta il punto di intersezione tra le due rette.
Cosa possiamo dire se le rette sono parallele? E se le rette sono coincidenti?

Vettori. Rette, piani e sistemi di equazioni

Le rette di equazioni $px + qy = k$ e $p'x + q'y = k'$

sono parallele se i vettori (p, q) e (p’, q’) sono allineati cioè se (p, q) = λ (p’, q’) , con λ un opportuno numero reale

Un sistema lineare in due equazioni e due incognite (2 x 2) ha la seguente forma

$$\begin{cases} px + qy = k \\ p'x + q'y = k' \end{cases}$$

Se le rette sono incidenti il sistema ha una sola soluzione
Se le rette sono parallele, il sistema non ha soluzioni
Se le rette sono coincidenti, il sistema ha infinite soluzioni

Le considerazioni fatte sull’esistenza delle soluzioni valgono anche nel caso di un sistema 3 x 3.
Le tre equazioni in tre incognite che costituiscono il sistema rappresentano piani nello spazio

Le stesse considerazioni valgono per lo spazio di dimensione n

$p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = k$ è chiamato iperpiano

Vettori. Rette, piani e sistemi di equazioni

Un sistema lineare in tre equazioni e tre incognite (3 x 3) ha la seguente forma

$$\begin{cases} px + qy + rz = k \\ p'x + q'y + r'z = k' \\ p''x + q''y + r''z = k'' \end{cases}$$

Se i piani hanno un punto in comune, il sistema ha una sola soluzione (x_0, y_0, z_0)

Il sistema non ha soluzioni, i piani non hanno, punti, o rette comuni
Il sistema ha infinite soluzioni, che possono rappresentare rette o piani

Esempi. Dire se i sistemi ammettono una, nessuna o infinite soluzioni. Verificare attraverso il calcolo

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 3{,}5y = 1{,}7 \\ 7y = 3{,}4 + 2x \end{cases}$$

Esempi. Risolvere con il metodo di sostituzione, confronto o riduzione (somma) i seguenti sistemi

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x - 2y - 2z = 6 \\ -x + 3y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y + z - 1 \\ x = 2y - 2z + 3 \\ -x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

Vettori e Matrici (elementi)

Un vettore v se rappresentato nella forma v = (x, y) è detto vettore riga,

mentre se rappresentato nella forma $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è detto vettore colonna

L'operazione che trasforma un vettore riga in un vettore colonna, o viceversa è detto Trasposizione

Una matrice 2x2 è una tabella di 4 numeri reali disposti su due righe e due colonne

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dato un vettore $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e una matrice T, definiamo **il prodotto righe per colonne** della matrice per il vettore

$$\mathrm{w} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Il vettore w si dice trasformato di v mediante T, la prima componente del vettore trasformato si ottiene moltiplicando scalarmente la prima riga per il vettore v , la seconda moltiplicando scalarmente la seconda riga per il vettore **v**

Vettori e Matrici (elementi)

La matrice 2x2 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si chiama **matrice identità** perché lascia invariati tutti i vettori

Esercizio. Definire un vettore e verificare l'affermazione

Una tabella di numeri reali composta da *n* righe ed *m* colonne si dice matrice *n* x *m*)

Ogni elemento di una matrice è individuato da due indici, il primo indica la riga, il secondo la colonna, l'elemento generico T_{ij} è il numero che si trova all'incrocio tra la riga i e la colonna j

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & .. & T1m \\ T_{21} & .. & ... & .. & T_{2m} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .T_{ij}. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ T_{n1} & .. & .. & .. & T_{nm} \end{pmatrix}$$

Per indicare la matrice si usa anche la forma compatta

$$\mathrm{T} = \{T_{ij}\} \quad \text{con} \quad i = 1,2,......,n \qquad j = 1,2,....,m$$

Vettori e Matrici (elementi)

La forma generale di un sistema lineare di m equazioni ed n incognite è data da

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

I termini a_{ij} sono i coefficienti del sistema che possono essere rappresentati come elementi della matrice A, i termini noti possono essere rappresentati dal vettore ***b***, le incognite dal vettore ***x***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{1m} \\ a_{21} & .. & \ldots & .. & a_{2m} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & .. & .. & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Per indicare il sistema si usa anche la forma compatta $Ax = b$

Che si ottiene considerando il prodotto (righe per colonne) della matrice A per il vettore *x*

Matrici. Somma, moltiplicazione per uno scalare e prodotto

Date due matrici *n x m* , $A = \{A_{ij}\}$ *e* $B = \{B_{ij}\}$ con $i = 1,2,\ldots\ldots,n$ $j = 1,2,\ldots.,m$
e uno scalare γ *,* definiamo

Somma di matrici $A + B = \{A_{ij} + B_{ij}\}$ è la matrice *n x m* che ha come elementi la somma dei corrispondenti elementi di *A* e di *B*

Moltiplicazione per uno scalare, la matrice $\gamma A = \{\gamma A_{ij}\}$ *n x m* che ha come elementi gli elementi di A moltiplicati per γ

Data la matrice *A* con *n* righe e *k* colonne , e la matrice *B* con *k* righe e *m* colonne definiamo la **matrice prodotto righe per colonne**, una matrice *C = AB* **n x** m il cui elemento *Cij* è ottenuto moltiplicando scalarmente l'i-esimo vettore riga di A per il j-esimo vettore colonna di B

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{ik}B_{kj} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}B_{rj}$$

Matrici. Somma, moltiplicazione per uno scalare e prodotto. Matrice inversa. Esempi

ESEMPI. Date le due matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

e lo scalare γ = -3

Determinare la somma $A + B = \{A_{ij} + B_{ij}\}$ la moltiplicazione per lo scalare $\gamma A = \{\gamma A_{ij}\}$

Il prodotto righe per colonne $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{ik}B_{kj} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}B_{rj}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \gamma A = \begin{pmatrix} -3 & 18 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + (-6)\cdot 3 & 1\cdot 1 + (-6)\cdot 0 \\ 1\cdot 5 + 2\cdot 3 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice inversa T^{-1} della matrice T è la matrice per la quale risulta $T\,T^{-1} = I = T^{-1}\,T$

Matrici. Somma, moltiplicazione per uno scalare e prodotto. Esempi e proprietà

ESEMPI. **Catene alimentari**

Date le due matrici T e A

$$T = \begin{pmatrix} 0.62 & 0.73 & 0.81 \\ 0.58 & 0.41 & 0.70 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.75 \\ 0.15 & 0.40 \\ 0.31 & 0.55 \end{pmatrix}$$

che rappresentano rispettivamente
La quantità in microgrammi per grammo delle sostanze tossiche (mercurio Hg ed erbicidi E) presenti in tre specie di alghe a_1, a_2, a_3 e la quantità media misurata in grammi delle tre specie di alghe a_1, a_2, a_3 di cui si cibano giornalmente due specie di crostacei c_1 e c_2

Determinare la quantità di ciascun tipo di inquinante ingerita da ciascuna specie di crostacei.

Date tre matrici per le operazioni introdotte valgono le seguenti proprietà

$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(\gamma A)B = \gamma(AB)$$

Il prodotto tra matrici è associativo $A(BC) = (AB)C = ABC$

Il prodotto tra matrici non è commutativo

Verificare se il prodotto tra matrici è commutativo. TA è soluzione del problema; AT è diverso da TA e non ha senso rispetto ai dati nella risoluzione del problema

Matrici. Somma, moltiplicazione per uno scalare e prodotto. Esempi e proprietà

ESEMPI. **Catene alimentari**

Date le due matrici T e A

$$T = \begin{pmatrix} 0.62 & 0.73 & 0.81 \\ 0.58 & 0.41 & 0.70 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.75 \\ 0.15 & 0.40 \\ 0.31 & 0.55 \end{pmatrix}$$

che rappresentano rispettivamente
La quantità in microgrammi per grammo delle sostanze tossiche (mercurio Hg ed erbicidi E) presenti in tre specie di alghe a_1, a_2, a_3
e la quantità media misurata in grammi delle tre specie di alghe a_1, a_2, a_3 di cui si cibano giornalmente due specie di crostacei c_1 e c_2
Determinare la quantità di ciascun tipo di inquinante ingerita da ciascuna specie di crostacei.

$$TA = \begin{pmatrix} 0.48 & 1.20 \\ 0.40 & 0.98 \end{pmatrix}$$

Date tre matrici per le operazioni introdotte valgono le seguenti proprietà

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(\gamma A)B = \gamma(AB)$$

Il prodotto tra matrici è associativo $A(BC) = (AB)C = ABC$;
Il prodotto tra matrici non è commutativo

Determinante di Matrici. Matrice singolare e risoluzione di sistemi omogenei

Si chiama Determinante di una matrice T 2x2 , e si indica con il numero reale

$$\det T = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det T = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}$$

La matrice T è invertibile se e solo se $\det T \neq 0$. In tal caso la matrice T è detta **non singolare**. In caso contrario la matrice è detta matrice singolare

Se la matrice *T* è non singolare, allora la matrice inversa T^{-1} è la matrice che esprime l'unica soluzione del sistema Tv = w nell'incognita v
e si ha $\mathbf{v} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{w}$

Tale risultato vale per una qualunque matrice $n \times n$
Se la matrice *T* è singolare, allora il sistema **Tv = 0** nell'incognita **v,** ha, oltre alla soluzione nulla, anche un numero infinito di soluzioni **v** $\neq 0$

Esempio. Verificare che la matrice A è singolare e risolvere il sistema Av = 0

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 18 \end{pmatrix}$$

Rappresentare nel piano cartesiano

Determinante di Matrici. Matrice singolare e risoluzione di sistemi omogenei

Si chiama Determinante di una matrice T 2x2 , e si indica con il numero reale

$$\det T = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det T = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}$$

La matrice T è invertibile se e solo se *det* $T \neq 0$. In tal caso la matrice T è detta **non singolare**. In caso contrario la matrice è detta matrice singolare

Se la matrice *T* è non singolare, allora la matrice inversa T^{-1} è la matrice che esprime l'unica soluzione del sistema Tv = w nell'incognita v

e si ha **v = T^{-1} w** Tale risultato vale per una qualunque matrice *n x n*

Se la matrice *T* è singolare, allora il sistema **Tv = 0** nell'incognita **v,** ha, oltre alla soluzione nulla, anche un numero infinito di soluzioni **v** $\neq 0$

Se la matrice *T* è singolare, allora il sistema **Tv = b** nell'incognita **v,** con **b ≠ *0*** , può avere nessuna o infinite soluzioni

Esempio. Trasformare il sistema *Av = b.* in forma algebrica e risolverlo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -12 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rappresentare nel piano cartesiano

Determinante di Matrici n x n

Data la matrice $\mathrm{T} = \{T_{ij}\}$ con $i = 1,2,\ldots\ldots,n$ $\quad j = 1,2,\ldots.,n$

Si chiama **matrice complementare** dell'elemento Tij, la matrice ottenuta sopprimendo l'i-esima riga e la j-esima colonna alle quali appartiene l'elemento.

Tale matrice interviene nel calcolo del determinante di una generica matrice n x n

Il Determinante di una matrice *T* n x n , si calcola con il seguente procedimento

- si sceglie una riga arbitraria
- **si calcolano i determinanti di tutte le matrici complementari degli elementi della riga scelta**
- **si moltiplicano i determinanti per i rispettivi elementi moltiplicati per -1 o 1 con il seguente criterio:**
    - **l'elemento T_{ij} ha segno positivo se i + j è pari, negativo se i + j è dispari.**
- si sommano i prodotti così ottenuti.

La regola può essere applicata anche scegliendo una qualunque colonna invece che una riga.

Risoluzione di sistemi . Regola di Cramer

Data la matrice $\mathrm{T} = \{T_{ij}\}$ con $i = 1,2,\ldots\ldots,n$ $\quad j = 1,2,\ldots.,n$

Matrice dei coefficienti del sistema Tv = w nell'incognita v = (x_1, x_2, ….x_n), di termine noto w = (b_1, b_2, …b_n)

Se la matrice è non singolare il sistema ha una unica soluzione e si ottiene calcolando

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det T}$$

Per j = 1, 2, …n. Dove B_j è la matrice ottenuta sostituendo w alla colonna Tj della matrice T

Esempio. Trovare la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -x + 3y + z = 0 \\ x + 7z = 1 \end{cases}$$

Si ha det T = 15,

x = 1, y = 1/3, z = 0

Esempi di quesiti delle prove scritte

- Dati i due vettori **v** e **w**, calcolare modulo, direzione e rappresentare **v**; calcolare e rappresentare la somma **v + w** e stabilire se i vettori sono perpendicolari

$$\mathrm{v} = (3,-6) \qquad \mathrm{w} = (4,2)$$

- Determinare le soluzioni, se esistono, del seguente sistema dato in forma vettoriale

$$Ax = b \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Determinare per quali valori di λ il sistema ha soluzione unica e determinarla per λ = - 2

$$Ax = b \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \frac{1}{3} & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$