

Corsi di Laurea in Scienze Naturali e Scienze Geologiche
Corso di Matematica con Elementi di Statistica - II Modulo

Docente: Prof.ssa Maria Polo
Esercizi proposti per la preparazione all'esame

Gli esercizi sono suddivisi secondo i temi principali affrontati nel secondo modulo del corso che saranno oggetto della prova scritta dell'esame. Alcuni degli esercizi proposti riprendono quelli svolti durante il corso e nelle esercitazioni tenute dai tutor.

Testo di riferimento: D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, Matematica per le scienze della vita, Ambrosiana, 2008.

Primitiva e Integrale di funzioni in una variabile

Calcolare i seguenti integrali. Per quelli indefiniti determinare un intervallo $[a; b]$ in cui la funzione sia integrabile.

$$(1) \int_{-3}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} dx$$

$$(9) \int_0^3 e^{2x-3} dx$$

$$(2) \int_2^{\sqrt{6}} (3x+1) dx$$

$$(10) \int_1^4 \frac{1}{3x+1} dx$$

$$(3) \int_2^{\pi} (x+1) \sin x dx$$

$$(11) \int_0^{\pi} \sin(4x) dx$$

$$(4) \int_{-\frac{1}{2}}^1 (3x^3 - 4x^2 + 3x - 1) dx$$

$$(12) \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$$

$$(5) \int_1^2 \left(5x - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}\right) dx$$

$$(13) \int_0^{\pi} \cos x \cdot e^{-\sin x} dx$$

$$(6) \int_{-1}^1 (x - \sqrt[3]{x}) dx$$

$$(14) \int_{-3}^1 (x+1)^5 dx$$

$$(7) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x - \cos x) dx$$

$$(15) \int \frac{1}{x} dx$$

$$(8) \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx$$

$$(16) \int \sqrt{2x-1} dx$$

Dopo aver disegnato il grafico delle seguenti funzioni, calcolare l'area sottesa dalla curva nell'intervallo indicato sia mediante il calcolo della primitiva, sia per via geometrica.

$$f_1(x) = 4 \quad \text{nell'intervallo } [-3, 3]$$

$$f_2(x) = 2 + 3x \quad \text{nell'intervallo } [2, 4]$$

$$f_3(x) = 3 - 2x \quad \text{nell'intervallo } [-2, 1]$$

$$f_4(x) = x - 1 \quad \text{nell'intervallo } [0, 4]$$

$$f_5(x) = |x - 1| \quad \text{nell'intervallo } [0, 4]$$

Problemi

1. Determinare l'area della parte di piano delimitata dalla curva di equazione $y = -x^2 + 4x - 3$ e dall'asse x .
2. Determinare l'area del trapezoide delimitato dalla curva di equazione $y = \frac{3}{2x}$ nell'intervallo $[2, 6]$ e, successivamente, quella delimitata nell'intervallo $[-6, -2]$
3. Determinare l'area della regione di piano racchiusa fra i grafici delle funzioni di equazioni $y = 4x^2$ e $y = 2x^2 + 3$
4. Determinare l'area della parte di piano racchiusa tra i grafici delle funzioni $f(x) = 3x^2 - 12$ e $g(x) = 3x + 6$
5. Determinare l'area delle seguenti regioni piane delimitate dalle curve assegnate:

(a) $y = x^2 + 2x + 1$ $y = x + 1$

(b) $y = \frac{1}{x^2}$ $x = -1$ $x = -\frac{8}{3}$ $y = 0$

Successioni e serie

1. Scrivere i primi 6 termini, rappresentarli su un grafico e calcolare il limite delle seguenti successioni:

$$(17) \quad a_n = \ln \frac{1}{n+1}$$

$$(18) \quad a_n = \frac{n-1}{n^2+1}$$

$$(19) \quad a_n = \sqrt{\frac{n^3-1}{n^2-1}}$$

$$(20) \quad a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$(21) \quad a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(22) \quad a_n = \cos(n\pi)$$

$$(23) \quad a_n = \begin{cases} \frac{2n}{2n+2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{n+1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$(24) \quad s(n) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

2. Determinare i primi 20 termini delle seguenti successioni e rappresentarli su un grafico

$$(25) \quad a_n = 0,5 \cdot a_{n-1} \quad \text{con } a_0 = 1$$

$$(26) \quad a_n = 0,2 \cdot a_{n-1}(1 - a_{n-1}) \quad \text{con } a_0 = 2$$

$$(27) \quad a_n = \frac{a_{n-1} + \left(1 - \frac{a_{n-1}}{100}\right)}{a_{n-1}} \quad \text{con } a_0 = 10$$

3. Determinare i termini delle seguenti serie per n che va da 1 a 5. Stabilire se le serie sono convergenti e se esiste finita, calcolarne la somma.

$$(28) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n}$$

$$(30) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(29) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{8}{5}\right)^n$$

$$(31) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$(32) \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{6})^{-n}$$

$$(33) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2e}{3}\right)^n$$

4. Date le seguenti serie: scrivere i primi quattro termini; calcolare la somma parziale per $n = 3$; dire se convergono o divergono.

$$(34) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k$$

$$(35) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k}$$

$$(36) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{8}{5}\right)^k$$

$$(37) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Elementi di combinatoria e calcolo delle probabilità

1. Determinare quanti e quali numeri diversi possono essere scritti con le cifre, tutte diverse, 2 7 5. Calcolare la probabilità dell'evento "si forma il numero 275 o il numero 752".
2. Dati i seguenti valori delle probabilità di due eventi incompatibili S e I , $P(S) = 0,02$ e $P(I) = 0,98$, determinare la probabilità che in 4 prove indipendenti, nelle quali la probabilità di S e I rimane invariata, S si verifichi 0, 1, 2, 3 o 4 volte. Ordinare in modo decrescente i valori ottenuti.

Problema 1. Si effettuano 4 lanci di una moneta non truccata. Calcolare la probabilità che vengano tre teste.

Problema 2. Si effettuano 3 lanci con una moneta truccata per cui la probabilità che esca testa è $3/4$. Qual è la probabilità che esca testa una sola volta?

Problema 3. Un antibiotico distrugge una certa coltura di batteri una volta su 5. Viene utilizzato su tre colture.

- Qual è la probabilità che una sola coltura non venga distrutta?
- Qual è la probabilità che almeno una coltura sopravviva?

Problema 4. In un bosco viene posta una trappola per catturare una certa specie di animali. La probabilità che in un giorno la trappola catturi un animale è del 18%.

- Con che probabilità in 5 giorni si catturano 3 esemplari?
- Quanti ci si aspetta di catturarne in 10 giorni?

Elementi di Statistica descrittiva e inferenziale

1. Esempi del testo di riferimento dal 12.10 al 12.16
2. Esercizi del testo di riferimento 12.2; 12.9

Problema 1. *Determinare media aritmetica, moda, mediana e rappresentare l'istogramma delle frequenze relative e accumulate degli insiemi di dati relativi alle valutazioni di un test effettuato in diversi anni contenuti nelle Tabelle 1, 2 e 3.*

Tabella 1: Voti relativi al 2005

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 7 | 5 | 8 | 5 | 4 | 7 | 5 | 6 |
| 5 | 6 | 6 | 6 | 5 | 7 | 5 | 5 | 8 | 3 |
| 2 | 4 | 7 | | | | | | | |

Tabella 2: Voti relativi al 2006

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 7 | 6 | 7 | 8 | 8 | 7 | 6 | 6 |
| 5 | 7 | 6 | 5 | 5 | 7 | 7 | 5 | 4 | 3 |
| 8 | 6 | 7 | 6 | 6 | | | | | |

Tabella 3: Voti relativi al 2007

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 7 | 4 | 5 | 7 | 6 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 5 | 7 | 6 | 6 | 7 | 7 | 3 | 4 | 8 | 5 |

Problema 2. *Viene effettuato un test di durata su un campione casuale di 100 lampadine a incandescenza. I dati vengono raggruppati in classi secondo la tabella 4 in cui la durata T è misurata in centinaia di ore. Calcolare la durata media delle lampadine del campione e la deviazione standard*

Tabella 4: Durata lampadine

| | | | | | | |
|-----------|----------|----------|-----------|------------|------------|------------|
| T | (0, 2.5) | (2.5, 5) | (5, 5.75) | (5.75, 10) | (10, 12.5) | (12.5, 15) |
| Frequenza | 8 | 27 | 15 | 17 | 27 | 6 |

Esercizio 3. *Calcolare la moda, la media e la mediana dell'insieme di dati di Tabella 5, e rappresentare l'istogramma delle frequenze relative espresse in percentuale (rappresentare anche la mediana)*

Tabella 5: Dati campionamento

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 4 | 5 | 2 | 1 | 4 | 3 | 4 | 1 |
| 5 | 0 | 4 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 |

Esercizio 1. Si considerino i valori riportati in Tabella 6 per due variabili statistiche relative a un campionamento

Tabella 6: Dati campionamento

| | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| X | 0.02 | 0.80 | 1.02 | 0.50 | 1.08 | 0.70 | 0.80 |
| Y | 1.08 | 2.20 | 0.99 | 1.60 | 2.00 | 1.60 | 1.70 |

- Rappresentare i dati in un grafico a dispersione.
- Calcolare covarianza e coefficiente di correlazione. Commentare i valori ottenuti.
- Determinare la retta di regressione.
- Fare una previsione su Y per $X = 0.20$

Problema 2. Si considerino i valori per due variabili statistiche relative ai campionamenti delle Tabelle 7, 8, 9

Tabella 7: Primo campionamento

| | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| X | 1 | 6 | 2 | 4 |
| Y | 2 | 1 | 3 | 0 |

Tabella 8: Secondo campionamento

| | | | | |
|-----|---|---|---|----|
| X | 0 | 1 | 3 | 4 |
| Y | 0 | 3 | 6 | 12 |

Tabella 9: Terzo campionamento

| | | | | |
|-----|-----|----|----|-----|
| X | 10 | 60 | 25 | 100 |
| Y | 200 | 10 | 50 | 20 |

- Rappresentare i dati in un grafico a dispersione.
- Calcolare covarianza e coefficiente di correlazione. Commentare i valori ottenuti.
- Determinare la retta di regressione.
- Fare una previsione su Y per un valore a scelta di X

Problemi e applicazioni

1. Esercizio 3.7 pag. 136 del testo di riferimento.
2. Esercizio 7.17 pag 294 (prima domanda) del testo di riferimento.
3. Si vuole formulare un modello empirico che descriva il numero di foglie di una pianta al variare del tempo. Una volta alla settimana si contano le foglie della pianta e si ottengono i dati seguenti relativi a 5 settimane consecutive:

$$f_1 = 14 \quad f_2 = 36 \quad f_3 = 76 \quad f_4 = 140 \quad f_5 = 234$$

Qual è il numero medio di foglie rilevato nelle 5 settimane?

Se la funzione $f(t) = (t+1)^3 + 3(t+1)$, dove t è il tempo misurato in settimane, descrive l'andamento della crescita delle foglie, calcolare la media della funzione nel periodo di osservazione e determinare il tempo t che corrisponderebbe al momento in cui il numero delle foglie nate si avvicina approssimativamente a tale media.

4. Un recente studio mostrerebbe che nel 2% dei pazienti trattati con un nuovo farmaco per curare disturbi da deficit dell'attenzione, sono state evidenziate come effetti secondari gravi forme di emicrania. Se si utilizza il farmaco su 10 individui scelti a caso, qual è la probabilità che nessun paziente abbia effetti secondari o che un solo paziente abbia effetti secondari?
5. Incrociando piante da due linee pure “*a fiore rosso*” e “*a fiore bianco*” si ha il seguente dato osservativo: 705 piante a fiore rosso e 224 a fiore bianco. Verificare se i dati ottenuti sono in accordo con l'ipotesi nulla che la probabilità di ottenere piante a fiore rosso sia $\frac{3}{4}$ e quella di ottenere piante a fiore bianco sia $\frac{1}{4}$.
6. In un vivaio vengono prodotte annualmente una media di 5500 piante, con una deviazione standard di 350 piante.
 - Con che probabilità, in un anno, si produce un numero di piante compreso fra 5500 e 6000?
 - Con che probabilità se ne producono meno di 4800?
7. L'altezza media dei maschi di una certa popolazione è 175cm. Supponiamo che la distribuzione delle altezze sia normale con scarto dalla media di 10cm.
 - In quale intervallo centrato intorno alla media sono distribuite le altezze con una percentuale del 99.7%?
 - Qual è la probabilità che un individuo preso a caso abbia un'altezza compresa fra 175 e 195 cm?
8. Esempi da 12.31 a 12.32 del testo di riferimento.
9. Esercizi dal 12.6 al 12.9 e dal 12.13 al 12.15 del testo di riferimento.