LAUREA IN SCIENZE NATURALI

MATEMATICA CON ELEMENTI DI STATISTICA

I parte: 5 crediti, 40 ore di lezione frontale
II parte: 4 crediti, 32 ore di lezione frontale

Docente: Marianna Saba
Dipartimento di Matematica e Informatica
Via Ospedale 72

mariannasaba@unica.it

Orario lezioni e superamento del debito

- Orario lezioni:
  - Lunedì ore 9:00-11:00
  - Mercoledì ore 9:00-11:00
  - **Presenze almeno del 60%**
- Esercitazioni:
  - Lunedì ore 14:30-16:30
  - **Presenze almeno del 80%**
- Recupero del debito:
  - Test a ottobre (forse a dicembre) oppure superamento del primo compito di Matematica.

Programma del corso: I modulo

- Insiemi e operazioni tra insiemi
- Gli insiemi N, Z, Q, R, rappresentazione decimale dei numeri reali
- Potenze e radici; valore assoluto; logaritmi
- Funzioni; funzioni elementari; funzioni iniettive, suriettive, bigettive, composte e inverse
- Limiti di funzioni
- Derivate
- Studio di funzione e rappresentazione del grafico
- Calcolo vettoriale e matriciale

Testi Suggeriti

1. D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, Matematica per le scienze della vita, Ambrosiana, 2008, seconda edizione 2012
2. S. Montaldo, A. Ratto, Matematica: 2^3 capitoli per tutti, Liguori, 2011

Perché dovete sostenere un esame di matematica?

Philosophiæ Naturalis Proncipia Matematica

(I principi matematici della filosofia naturale)

Isaac Newton, 1687

Perché dovete sostenere un esame di matematica?

Lo scienziato studia e vuole comprendere i fenomeni del mondo

⇓

La matematica fornisce gli strumenti per descrivere, modellizzare e prevedere l'andamento dei fenomeni

⇓

Leggi della natura: principi generali validi in diverse situazioni

⇙ Osservazione del fenomeno e acquisizione dei dati e descrizione delle loro relazioni

⇓ Prevedere lo sviluppo degli eventi grazie a un modello teorico del fenomeno

⇘ Il modello matematico teorico del fenomeno non è una copia del mondo reale, ma più semplice e adattabile a situazioni diverse

Gli insiemi: definizione e identificazione

- A è l'insieme degli studenti iscritti al primo anno di Scienze Naturali:
- B è l'insieme formato dai numeri 1, 2, 3, 4, 5
  - **Elencazione**: elenco tutti gli elementi dell'insieme

$$\left\{2, \frac{3}{4}, -6, \pi\right\}$$

  - Uso una **proprietà** che caratterizza tutti e soli gli elementi dell'insieme :

$$A = \{x: P(x)\}$$

- Scrivere gli esempi precedenti usando le definizioni.

.

Gli insiemi: definizione e identificazione

- Un insieme è formato dai suoi elementi, e si dice che
  - $a \in A$ se a appartiene ad A
  - $a \notin A$ se a non appartiene ad A
- L'insieme senza elementi si chiama insieme vuoto: $\emptyset$
- La scrittura $A = \{x: P(x)\}$ significa che la proprietà $P(x)$ deve essere vera per ogni $x \in A$
- Esempi
  - $A = \{n: 2n = 8\}$

  Qual è $P(n)$? Per quali valori di n, $P(n)$ è vera? Quindi quali sono gli elementi di A?
  - $B = \{x: x - 1 > 0\}$

  Qual è $P(x)$? Per quali valori di x, $P(x)$ è vera? Quindi quali sono gli elementi di B?

Quantificatori

- Quantificatore universale:

  "**per ogni** " $\forall$

- Quantificatore esistenziale:

  " **esiste almeno un** " $\exists$

- Quantificatore esistenziale (esistenza e unicità)

  " **esiste un unico** " $\exists!$

- Esempi
  - $\forall x: P(x)$ si legge " per ogni x tale che P di x "
  - $\forall x \in A\ \exists b: x = P(b)$ si legge: "per ogni x in A esiste b tale che x è uguale a P di b"
  - $\exists!\, \mathrm{x}: \mathrm{P}(\mathrm{x})$ si legge "esiste uno e un solo x tale che P di x"

Operazioni tra insiemi: unione e intersezione

- Unione $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

  $\vee$ si legge *oppure*

- Intersezione $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

  $\wedge$ si legge e

- Esempio
  $A = \{A, C, G, T\}$ (insieme delle basi azotate DNA)
  $B = \{A, C, G, U\}$ (insieme delle basi azotate RNA)

- $A \cup B = \{A, C, G, T, U\}$
- $A \cap B = \{A, C, G\}$

Operazioni tra insiemi: unione e intersezione. Esempi

Descrivere a parole gli insiemi:

- $A = \{x: x \in R \ \wedge x < 3\}$
- $B = \{x: \text{"x è una figura geometrica"} \wedge \text{"}x\ ha\ 4\ lati\text{"}\}$
- $C = \{n: n \geq 15 \vee 3 < n \leq 6\}$

Dati gli insiemi $A = \{1,3,5,7\}, B = \{4,7,8,9\}, C = \{1\}$

Determinare gli insiemi $A \cap B, A \cup B, A \cup C, \mathrm{A} \cap B \cap C$

Sintesi

- Definizione di un insieme:
  - Per elencazione
  - Mediante una proprietà che caratterizza tutti e soli gli elementi dell'insieme
- Quantificatori
  - Universale: $\forall$
  - Esistenziale: $\exists$ e $\exists!$
- Unione: $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$
- Intersezione: $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$

Sottoinsiemi e relazione di inclusione. Tassonomia

- Problema concreto: Identificare le diverse specie viventi e dare loro un nome universalmente accettato
- Problema aperto: fare un elenco di tutte le specie viventi sulla terra e raggrupparle in classi progressivamente più estese (Tassonomia)

$$\Downarrow$$

Raggruppare oggetti in classi (insiemi)

$$specie \subset genere \subset famiglia \subset ordine \subset classe \subset philum \subset regno$$

Formalizzazione dell'inclusione insiemistica

- Dati due insiemi A e B, A è sottoinsieme di B se ogni elemento di A appartiene anche a B e si indica con

$$A \subseteq B \text{ (}A\text{ è incluso in }B\text{)}$$

In formule: $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B)$

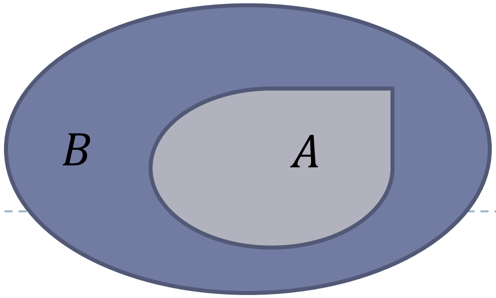
- Ogni sottoinsieme è un sottoinsieme banale di se stesso

$$A \subseteq A.$$

- Se un sottoinsieme A e strettamente contenuto in B, cioè esistono elementi di B che non appartengono a A (esiste almeno un elemento di B che non appartiene a A), si scrive

$$A \subset B \text{ (}A\text{ è strettamente incluso in }B\text{)}$$

In formule: $A \subset B \Leftrightarrow ((\forall a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge (\exists b \in B : b \notin \mathrm{A}))$



Esempi sull'inclusione

- Esempi:
  - $A = \{1,2,3,4\}$ è incluso in $B = \{1,2,3\ ,4,5,6\}$?
  - $A = \{1,2,3,4\}$ è incluso in $B = \{1,2,4,5,6\}$?
  - Trovare tutti i sottoinsiemi di due elementi dell'insieme A.

- Due insiemi A e B si dicono uguali e si indica con

$$A = B$$

se e solo se valgono contemporaneamente

$$A \subseteq B \; e \; B \subseteq A.$$

In formule: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

Estensioni dei numeri

- $N \subset Z \subset Q \subset R$
- $N = \{0,1,2,3, \dots\}$ numeri naturali
- $Z = \{\dots, -2, -1,0,1,2, \dots\}$ numeri interi
- $Q = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in Z, q \neq 0\right\}$ numeri razionali
- $I =$ numeri irrazionali, esempi: $\sqrt{2}, \mathrm{e}, \pi$
- $R = Q \cup I$
- Esistono insiemi finiti? E insiemi infiniti? Esempi. Entrambi i casi consentono entrambe le definizioni?
- Cardinalità dell'insieme A si indica con $|A|$ e descrive il numero degli elementi di A.
- Gli insiemi infiniti hanno tutti lo stesso numero di punti?

Esempi di insiemi infiniti

- L'insieme dei numeri pari $P = \{p \in N : p = 2n, n \in N\}$
- L'insieme dei numeri primi $P = \{p \in N : p \text{ è } primo\}$

Un numero $p \neq 1$ si dice primo se è divisibile solo per 1 e per se stesso.

Il teorema di fattorizzazione dei numeri naturali assicura che ciascun numero sia scomponibile in modo unico come prodotto di potenze di numeri primi (detti fattori).

- Esercizio. Scomporre in fattori primi i numeri 68 e 105.

Esempi di insiemi finiti

Determinare, per elencazione i seguenti insiemi

- $A = \{p \in N : p = 2n + 1 \ \wedge \ \ 2n < 10{,}5, n \in N \}$
- $B = \{p \in N : p \text{ è } un\ numero\ dispari\ minore\ di\ 10 \}$
- $C = \{b \in R : \ b \text{ è } soluzione\ dell'equazione$
  $x^2 + 2x + 1 = 0\}$

Dire se $B \subseteq A, A \subseteq B, C \subseteq A, C \subseteq B$

Differenza insiemistica e complementare

- Differenza:

$$A \setminus \mathrm{B} = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Esempio:

$A = \{A, C, G, T\}$ (insieme delle basi azotate DNA)

$B = \{A, C, G, U\}$ (insieme delle basi azotate RNA)

$$A \setminus \mathrm{B} = \{T\}$$

- Rispetto a un insieme universo U possiamo definire il complementare dell'insieme A come

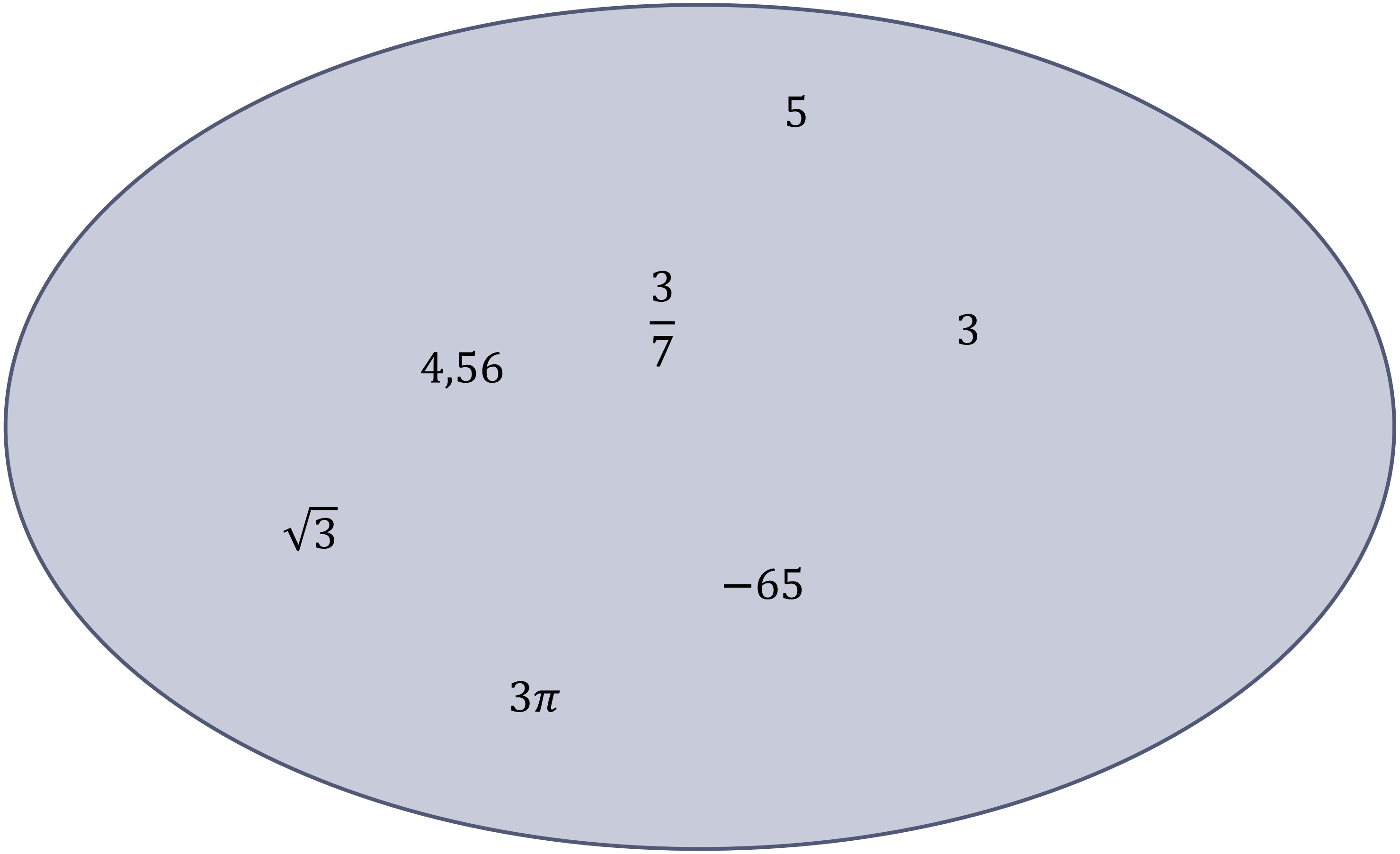
$$C(A) = \{x \in U : x \notin A\} = U \setminus \mathrm{A}$$

Esempio: $U = N, A = \{x : x \text{ è } pari\}$, allora

$$C(A) = \{x : x \text{ è } dispari\}$$

Esempio

Individuare i sottoinsiemi di R



Terza lezione

- Perché $\sqrt{2} \notin Q$
- Estensione degli insiemi numerici mediante risoluzione di equazioni
- Rappresentazione dei numeri reali
- Proprietà di R
- Potenze

Perché $\sqrt{2} \notin Q$

Dimostrazione per assurdo.

1. Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in Q$
2. $\Rightarrow \exists p, q \in Q$, primi tra loro : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$
3. $\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$
4. $\Rightarrow p^2 = 2q^2 \qquad \Rightarrow p^2$ è pari
5. $\Rightarrow$ anche p è pari $\Rightarrow p = 2s, s \in Z$
6. $\Rightarrow (2\mathrm{s})^2 = 2\mathrm{q}^2 \qquad \Rightarrow 4s^2 = 2q^2$
7. $\Rightarrow 2s^2 = q^2 \qquad \Rightarrow q^2$ è pari
8. $\Rightarrow q$ è pari
9. $\Rightarrow$ ho contraddetto l'ipotesi che p e q fossero primi tra loro

Estensioni mediante le equazioni

- Cerchiamo $n \in N: 2 + n = 5 \Rightarrow n = 5 - 2 \ \Rightarrow n = 3$
- Cerchiamo $n \in N$: $5 + n = 2 \Rightarrow \nexists n \in N$

troviamo invece $n \in Z$: $5 + n = 2 \Rightarrow n = 2 - 5 \Rightarrow n = -3$

- Cerchiamo $n \in Z: 2n = -6, \Rightarrow n = \frac{-6}{2} \Rightarrow n = -3$
- Cerchiamo $n \in Z: 2n = 5 \Rightarrow \nexists n \in Z$

troviamo invece $n \in Q$: $2n = 5 \Rightarrow n = \frac{5}{2}$

- Cerchiamo $n \in Q: n^2 - 1 = 0, \Rightarrow n = \pm 1$
- Cerchiamo $n \in Q: n^2 - 2 = 0 \Rightarrow \nexists n \in Q$

troviamo invece $n \in R$: $n^2 - 2 = 0 \Rightarrow n = \pm\sqrt{2}$

Rappresentazioni dei numeri reali. Numeri razionali

- Rappresentazione decimale finita o infinita periodica
- Rappresentazione frazionaria
- Passaggio da una forma all'altra:

1. Decimale finito: $x = 12{,}25 \qquad x = \frac{1225}{100} = \frac{245}{20} = \frac{49}{4}$
2. Decimale infinito periodico:
   - $x = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} \qquad x = 0,\overline{3}$
   - $x = 2{,}1\overline{3} \qquad x = \frac{213-21}{90} = \frac{192}{90} = \frac{32}{15}$

Tanti 9 quante sono le cifre del periodo, e tanti 0 quante sono le cifre decimali che precedono il periodo

Rappresentazione dei numeri reali

Es: sono vere le seguenti uguaglianze?

$2,\overline{9} = 3$ $\qquad 2{,}5 = \frac{5}{2}$ $\qquad \frac{1}{5} = 1{,}5$

- Rappresentazione polinomiale:

Es. $1234{,}54 =$

$$= 1000 + 200 + 30 + 4 + 0{,}5 + 0{,}04 =$$

$$= 1000 + 200 + 30 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} =$$

$$= 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2$$

- Numeri irrazionali:

Hanno una rappresentazione decimale infinita non periodica ed è impossibile rappresentarli con tutte le loro cifre.

Es. $\sqrt{2}, \pi, e, \sqrt{3}$

Approssimazione di numeri reali e errore di approssimazione

- Approssimazione di un numero:
  - Per eccesso: $1{,}237 \approx 1{,}24$ (la cifra da eliminare è ≥ 5)
  - Per difetto: $1{,}234 \approx 1{,}23$ (la cifra da eliminare è < 5)

  Es. approssimare i seguenti numeri:

  $13{,}45$ $\quad 0{,}236$ $\quad 345{,}29$ $\quad 423{,}142$

- Il numero approssimato $\mathrm{x} = 145{,}34$ in realtà è un numero $145{,}335 \leq x < 145{,}345$

$\Rightarrow$ l'errore di approssimazione, cioè la differenza tra il numero vero e la sua approssimazione, è inferiore a $0{,}005$

- $a = (12{,}35 \pm 0{,}01)$ indica che $12{,}34 \leq a \leq 12{,}36$

$0{,}01$ è detto errore assoluto

Proprietà dei numeri reali

In R sono definite due operazioni:

- Somma: a, b $\in R \;\rightarrow a+b \in R$
- Prodotto: a, b $\in R \;\rightarrow a \cdot b \in R$

Proprietà:

	Somma	**prodotto**
Commutatività	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associatività	$(a+b)+c=a+(b+\mathrm{c})$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Elemento Neutro	$0; \quad a+0=a$	$1; \quad a \cdot 1 = a$
Elemento inverso	$-a; \quad a+(-a)=0$	$\frac{1}{a}; \text{se a} \neq 0; \quad a \cdot \frac{1}{a}=1$

Distributiva: $(a+b)\cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Operazioni in R. Le potenze

$$a, b \in R, \qquad m, n \in N$$

- $a^m = a \cdot a \cdot \dots \cdot a, \;\; m$ volte

(si legge "a elevato m" a è la base, m è l'esponente)

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$
- $a^0 = 1$
- $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
- $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Operazioni in R. Le potenze con esponente negativo

Cosa significa elevare un numero reale a per -1?

Siano $\mathrm{m} = 0$ e $\mathrm{n} = 1$, allora

$$\frac{a^0}{a^1} = a^{0-1} = a^{-1}$$

ma $\frac{a^0}{a^1} = \frac{1}{a}$, quindi $\frac{1}{a} = a^{-1}$ cioè a^{-1} è il reciproco di a.

- Quindi $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- Se $a = 0$ allora si può calcolare $a^n = 0$

ma non si può calcolare $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{0}$

Es: scrivere in forma polinomiale il numero $1{,}342$ (usando le potenze di dieci)

Notazione scientifica

- Ogni numero può essere scritto come prodotto di un numero compreso tra 1 e 10 per un'opportuna potenza di 10. (se il numero è negativo ci sarà il segno meno)

Es.

- $123363 = 1{,}23363 \cdot 10^5$
- $15 = 1{,}5 \cdot 10^1$
- $0{,}0361 = 3{,}61 \cdot 10^{-2}$
- $-0{,}0046321 = -4{,}6321 \cdot 10^{-3}$
- $-35829{,}4 = -3{,}58294 \cdot 10^4$

Operazioni in R. Le potenze con esponente razionale

Grazie alla proprietà $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ si possono calcolare le potenze con esponente razionale.

- $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

infatti $\sqrt{a}$ è il numero che elevato al quadrato da a:

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^1 = a$$

- $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$
- $a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Operazioni in R. Le potenze con esponente reale

- Se $a < 0$ non posso estrarre le radici di indice pari di a:

$$a < 0 \Rightarrow \text{non si può definire } a^{\frac{1}{n}}, n \text{ pari}$$

- Se $a > 0 \Rightarrow \forall x \in R\ \exists a^x$

- Dire se ha senso definire $\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad 2^x \quad (-32)^x$

- Dire per quali valori di k sono calcolabili, $\forall x \in R$,

$(k-1)^{-2x} \quad (-2k+1)^x \quad (-2k+1)^{3x} \quad (k^2-2)^x$

Ordinamento in R

In R è definito un ordinamento totale indicato con il simbolo $\leq$

$$\forall a, b \in R \Rightarrow a \leq b \vee b \leq a$$

(si legge: "$\forall a, b \in R$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$")

Questo ordinamento verifica le seguenti proprietà:

- Riflessiva: $a \leq a$
- Antisimmetrica: se $a \leq b \wedge b \leq a$ allora $a = b$
- Transitiva: se $a \leq b \wedge b \leq c$ allora $a \leq c$

Ordinamento di R e operazioni di somma e prodotto:

- se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c, \forall c \in R$
- se $a \leq b$ e $c > 0$ allora $a \cdot c \leq b \cdot c$
- se $a \leq b$ e $c < 0$ allora $a \cdot c \geq b \cdot c$

Esercizio: Ordinare numeri

- Esercizio:

Mettere in ordine crescente le coppie di numeri

$2{,}2$ e $2{,}19$; $\frac{32}{15}$ $\frac{20}{9}$; $2{,}5$ e $\sqrt{5}$; $-2{,}9$ e $-3{,}1$

Mettere in ordine crescente i numeri dell'insieme

$$A = \left\{\frac{8}{4}, \frac{1}{2}, 1.4\bar{9}, \sqrt{2}, \frac{2}{3}, 1.12, \sqrt[3]{3}\right\}$$