Lezione 19. 09/12/2015

- Massimi e minimi locali
- Limiti

Massimi e minimi relativi

Data la funzione $f(x)$ definita nel dominio $D \subseteq R$, si dice che

- $f(x)$ ha un punto di **massimo locale** in $x_0 \in I$, $I = [a,b] \subseteq D$, se

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{f(x_0) \geq f(x)}$$

questo valore $\max f = f(x_0) \in f(D)$.

- $f(x)$ ha un punto di **minimo locale** in $x_0 \in I$, $I = [a,b] \subseteq D$, se

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{f(x_0) \leq f(x)}$$

questo valore $\min f = f(x_0) \in f(D)$.

Modello di Malthus

- Sia $N(t) = R^t N_0$, con $R > 0$ e $N_0 > 0$ la legge che descrive l'evoluzione nel tempo t della numerosità $N(t)$ di una popolazione malthusiana in dipendenza dal tasso di natalità e di mortalità.

Qual è il destino finale della popolazione?

Cosa succede alla numerosità della popolazione al passare del tempo? Dal momento che t non ha limitazioni, si permette a t di assumere valori sempre più grandi fino a far tendere t a $+\infty$.

$$t \to +\infty \Rightarrow \mathrm{N(t)} \to ?$$

Dipende dal valore di R!

Modello di Malthus: l'operazione di limite

- Se $R > 1,\ t \to +\infty \ \Rightarrow\ N(t) \to +\infty$ (crescita illimitata)

e si scrive

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = +\infty$$

- Se $R < 1,\ t \to +\infty \ \Rightarrow\ N(t) \to 0$ (estinzione)

e si scrive

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$$

- Se $R = 1,\ t \to +\infty \ \Rightarrow\ N(t) \to N_0$ (popolazione in equilibrio)

e si scrive

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = N_0$$

L’operazione di limite

- Sia $f(x)$ una funzione definita su R, cosa succede quando x tende a $+\infty$ e cosa succede quando tende a $-\infty$? Esempi

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \qquad h(x) = \cos x$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \cos x = \nexists$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \cos x = \nexists$$

La retta $y = 0$ è un **asintoto orizzontale** per la funzione $f(x)$.

La retta $y = 1$ è un **asintoto orizzontale** per la funzione $g(x)$.

Definizioni

- Si dice che il limite per x che tende a $+\infty$ della funzione $f(x)$ è $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

se $\forall M > 0\ \ \exists k > 0$ tale che $\forall x > k$ si ha $f(x) > M$.

Es. $f(x) = 2^x$

- Si dice che il limite per x che tende a $+\infty$ della funzione $f(x)$ è $l \in R$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

se $\forall \epsilon > 0\ \ \exists k > 0$ tale che $\forall x > k$ si ha $|f(x) - l| < \epsilon$.

Es. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

L’operazione di limite

Sia $f(x) = \tan x$, Dominio: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \;\; k \in Z$

Consideriamo $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e studiamo il comportamento di $f(x)$ agli estremi di D.

Diciamo: per x che tende a $-\frac{\pi}{2}$ la funzione $f(x)$ tende a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$$

Diciamo: per x che tende a $\frac{\pi}{2}$ la funzione $f(x)$ tende a $+\infty$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$$

La retta $x = \frac{\pi}{2}$ è un **asintoto verticale** per la funzione $f(x) = \tan x$.

La retta $x = \frac{\pi}{2}$ è un **asintoto verticale** per la funzione $f(x) = \tan x$.

L’operazione di limite

Sia $f(x) = \tan x$, Dominio: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$

Qual è il limite di $f(x)$ per x che tende a $\frac{\pi}{2}$?

Dipende se mi sto avvicinando da destra o da sinistra:

- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$:per x che tende a $\frac{\pi}{2}$ da sinistra, la funzione $f(x)$ tende a $+\infty$
- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$:per x che tende a $\frac{\pi}{2}$ da destra, la funzione $f(x)$ tende a $+\infty$

Esercizio: Qual è il valore a cui tende f(x) quando x che tende a $-\frac{\pi}{2}$ da destra e da sinistra?

Ovvero: Qual è il limite di f(x) quando x che tende a $-\frac{\pi}{2}$ da destra e da sinistra?

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = ? \qquad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \tan x = ?$$

Operazioni sui limiti: somma

- Date due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$, il limite della somma $f(x)+g(x)$ per x che tende a x_0 è uguale alla somma dei limiti. Ovvero, se per x che tende a x_0, $f(x)$ tende a l_1 e $g(x)$ tende a l_2, allora $f(x)+g(x)$ tende a l_1+l_2:

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = l_1 \pm l_2$

- Si ha una forma indeterminata o di indecisione quando
- $l_1 = +\infty$ e $l_2 = -\infty$ oppure
- $l_1 = -\infty$ e $l_2 = -\infty$.
- Esempi:

$\lim_{x \to -\infty} (-3^x + 3x) = -\infty \quad \lim_{x \to 3} (10x + 3x^2) = 57 = f(3)$

$\lim_{x \to +\infty} (x - x^2) = \lim_{x \to +\infty} x(1-x) = ?$ come si calcola il limite del prodotto?

Operazioni sui limiti: prodotto

- Date due funzioni, il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti. Ovvero, se per x che tende a x_0 la funzione $f(x)$ tende a l_1 e la funzione $g(x)$ tende a l_2, allora per x che tende a x_0, la funzione prodotto $f(x) \cdot g(x)$ tende a $l_1 \cdot l_2$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = l_1 \cdot l_2$

- Si ha una forma indeterminata o di indecisione quando
- $l_1 = \pm\infty$ e $l_2 = 0$ oppure
- $l_1 = 0$ e $l_2 = \pm\infty$.

- Esempi:

$\lim_{x \to 2} 3^x \log(x-2)$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} 3^{-x}(x+1)$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} 3^{-x}(x+1)$