Lezione 20. 14-12-2015

- Come sono legati i limiti allo studio di funzione?
- Ripasso: limite di somme e prodotti
- Limite del rapporto di funzioni
- Moltiplicare e dividere per una funzione che tende a $\pm\infty$
- Polinomi e forme indeterminate
- Asintoti orizzontali, verticali e obliqui

Come sono legati i limiti allo studio di funzione?

- Obiettivo del primo semestre: essere in grado di fare lo studio qualitativo di una funzione di variabile reale a valori reali. Ovvero

- stabilire:

1. Dov'è definita la funzione? Ricerca del dominio
2. Che andamento ha la funzione agli estremi del dominio? Calcolo dei limiti.
3. In quali intervalli la funzione è crescente o decrescente? Ci sono massimi e minimi locali? Studio della derivata prima.
4. Ci sono massimi e minimi globali?
5. In quali intervalli la funzione ha la concavità verso l'alto o verso il basso? Studio della derivata seconda.
6. Disegnarne il grafico.

- Dato il grafico di una funzione, ricavare queste informazioni dal grafico.

Ripasso

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, se, per x che tende a x_0 le due funzioni tendono rispettivamente a l_1 e l_2, allora

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = l_1 + l_2 \qquad \lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = l_1 \cdot l_2$$

Es:

$$\lim_{x \to +\infty} \log(x - \sqrt{4}) + \sqrt{5x} = +\infty + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \to \sqrt{6}^+} \log(x - \sqrt{6}) \cdot (x^2 - 4) = -\infty \cdot 2 = -\infty$$

Problemi quando si ottengono **forme indeterminate**: es.

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 2x^2 + 1) \qquad \lim_{x \to \sqrt{6}^+} \log(x - \sqrt{6}) \cdot (x - \sqrt{6})$$

Operazioni sui limiti: rapporto

- Date due funzioni, il limite del rapporto è uguale al rapporto dei limiti. Ovvero, se per x che tende a x_0 la funzione $f(x)$ tende a l_1 e la funzione $g(x)$ tende a l_2, allora per x che tende a x_0, la funzione rapporto $f(x)/g(x)$ tende a l_1/l_2.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

- Si ha una forma indeterminata o di indecisione quando
  - $l_1 = \pm\infty$ e $l_2 = \pm\infty$ oppure
  - $l_1 = 0$ e $l_2 = 0$.

Limite del rapporto: esempi

- $$\lim_{x\to 2} \frac{3^x}{\log_2(4x)} = \frac{9}{3} = 3$$
- $$\lim_{x\to -\infty} \frac{2^{-x}}{x+1} = \frac{+\infty}{-\infty}$$
- $$\lim_{x\to 0} \frac{x+x^2}{4x+3} = \frac{0}{3} = 0$$
- $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$
- $$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$
- $$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+4}{x+2} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$
- $$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = -4$$

Operazioni sui limiti

Sia $c \in R$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, allora

$$\lim_{x\to+\infty} (c + f(x)) = +\infty$$

se $c \neq 0$, allora $\lim_{x\to+\infty} (cf(x)) = \begin{cases} +\infty & se\ c > 0 \\ -\infty & se\ c < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{c}{f(x)} = 0$$

Es: $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = ?$

Le stesse proprietà valgono se sostituiamo a c una funzione $g(x)$ che converge a c per x che tende a $+\infty$.

- Esempio: Studiare il comportamento della funzione $f(x) = -2e^x$ agli estremi del dominio

Polinomi e forme indeterminate

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x^3+1}{4x-3x^2} = \frac{+\infty-\infty}{-\infty}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x+x^3}{4x-3x^2} = \frac{0}{0}$

- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x^3+1}{4x-3x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(\frac{4}{x}-3\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(\frac{4}{x}-3\right)}$$
$$= \frac{-\infty(0+1+0)}{0-3} = \frac{-\infty}{-3} = +\infty$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{x+x^3}{4x-3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+x^2)}{x(4-3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2)}{(4-3x)} = \frac{1}{4}$$

Es: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sqrt{x}}{x+2}$

Polinomi e forme indeterminate

Es: $$\lim_{x\to-\infty}(x+1)\frac{1}{x^2} = -\infty \cdot 0$$

La forma indeterminata $\pm\infty \cdot 0$ si risolve trasformandola nella forma $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x^2} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Ricapitolando: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = ?$

- Si possono verificare tre casi:

  - $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ $\Rightarrow$ la funzione converge

    la retta $y = l$ è **asintoto orizzontale**

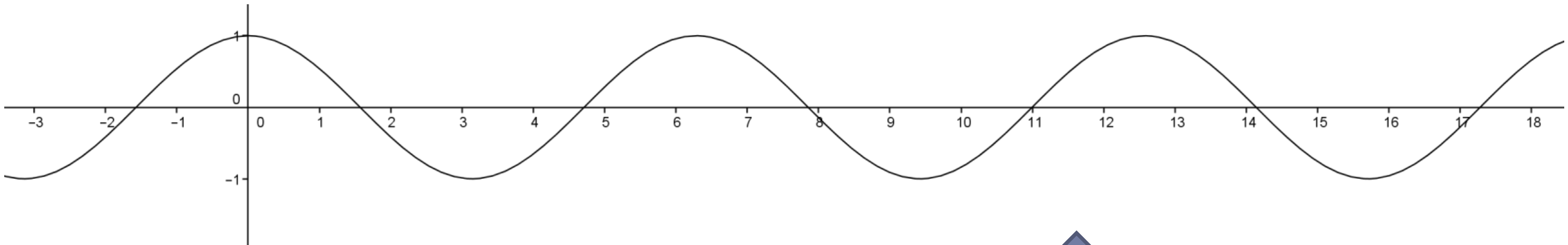
Es: $\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$

  - $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ $\Rightarrow$ la funzione diverge

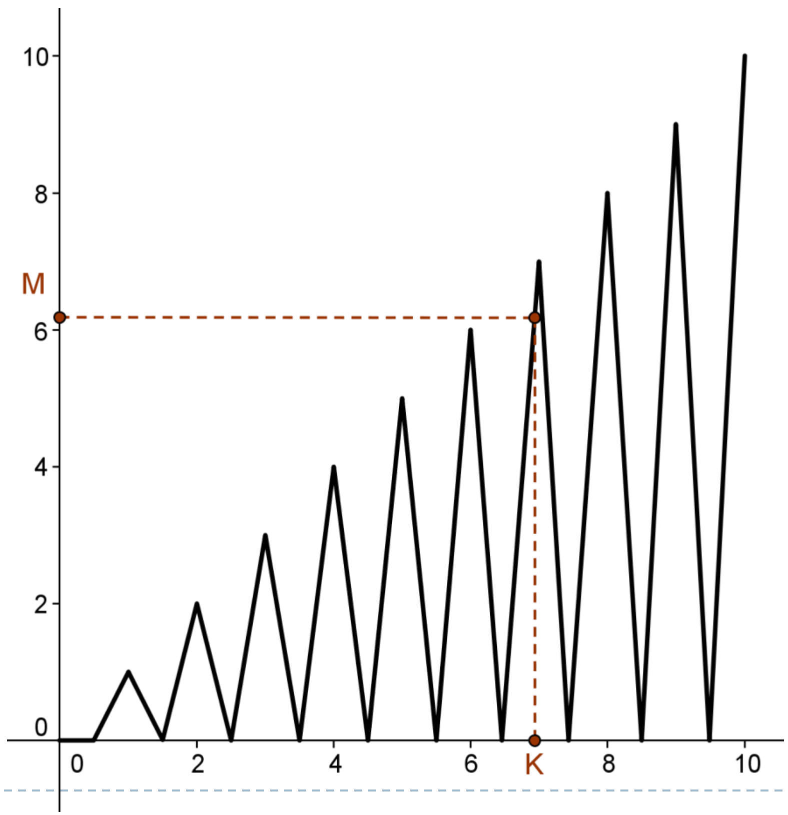
Es: $\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$

  - $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \nexists$ $\Rightarrow$ non esiste il limite

Esempi in cui $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \nexists$



$$\lim_{x \to \pm\infty} \cos x = \nexists$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \nexists$$

Ricapitolando: $\lim_{x \to x_0} f(x) = ?$, con $x_0 \in R$

- Si possono verificare tre casi:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} l = f(x_0) \\ l \neq f(x_0) \end{cases}$

2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow$ la funzione diverge

   la retta $x = x_0$ è un **asintoto verticale**

Es: $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$

3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \nexists \quad \Rightarrow$ non esiste il limite

Caso 1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \quad \text{con } x_0 \in R$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} l = f(x_0) \\ l \neq f(x_0) \end{cases}$$

- $f(x) = x^2 \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} x^2 = (x_0)^2 = f(x_0)$

  Es: $\lim_{x \to 4} x^2 = 4^2 = f(4)$

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x < 0 \\ 1 & se\ x = 0 \\ x^2 & se\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$

dove $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ perché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

Caso 3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \nexists$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ 3x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \nexists$ perché i due limiti

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (3x + 1) \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + 2)$$

sono diversi.

Caso 3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \nexists$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \text{ definita in } D = R \setminus \{0\}$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \nexists$ perché i due limiti

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

sono diversi.

Asintoti

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow x = x_0$ asintoto verticale

Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \qquad \Rightarrow y = l$ asintoto orizzontale

Se $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in R$ e $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = q \in R$

$\Rightarrow \quad y = mx + q$ è asintoto obliquo

Studio di funzione. Dominio e limiti

Es. $f(x) = \frac{x^2+2}{x}$ $\qquad D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2}{x} = -\infty$$

Possibile asintoto obliquo

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+2}{x} = -\infty$$

$x = 0$ asintoto verticale

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+2}{x} = +\infty$$

$x = 0$ asintoto verticale

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{x} = +\infty$$

Possibile asintoto obliquo

Studio di funzione. Dominio e limiti. Ricerca dell'asintoto obliquo

Se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ potrebbe esserci un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$.

L'asintoto obliquo esiste se trovo i due numeri reali m e q mediante le formule

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad q = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx)$$

Analogamente, se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ potrebbe esserci un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$.

L'asintoto obliquo esiste se trovo i due numeri reali m e q mediante le formule

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$$

Studio di funzione. Dominio e limiti. Ricerca dell'asintoto obliquo

Nel nostro esempio, per $x \to -\infty$ potrebbe esserci l'asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2} = 1 \in R \Rightarrow \qquad m = 1$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2}{x} - 1 \cdot x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2-x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \qquad q = 0$$

Per $x \to -\infty$ la funzione tende asintoticamente alla retta $y = x$.

Esiste l'asintoto obliquo anche quando $x \to +\infty$?

Lezione 21. 16-12-2015

- Continuità
- Tipi di discontinuità
- Derivata
- Significato geometrico di derivata
- Derivate elementari
- Derivata della somma, del prodotto e del rapporto di funzioni

Funzioni continue

- Def: Data una funzione $f(x)$ di variabile reale a valori in R e x_0 un punto del dominio (o un estremo del dominio), si dice che $f(x)$ è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in R \quad \wedge \quad l = f(x_0)$$

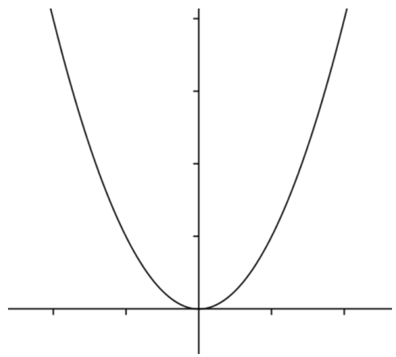
Si dice che f è continua in un intervallo se f è continua in tutti i punti di tale intervallo.

- Esempi: $f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \ se \ x < 0 \\ 1 \quad se \ x = 0 \\ x^2 \ se \ x > 0 \end{cases}$

Sono continue in $\mathrm{x}_0 = 0$?

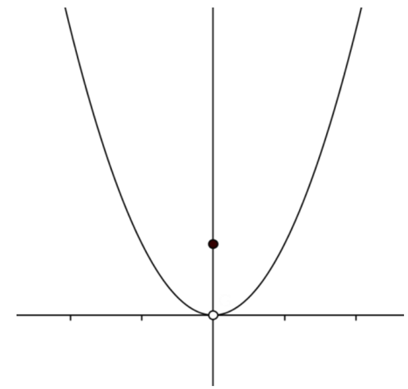
Sono funzioni continue?

$$f(x) = x^2$$



$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 = f(0)$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \; se \; x < 0 \\ 1 \;\; se \; x = 0 \\ x^2 \; se \; x > 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \neq g(0) = 1$$

$f(x)$ è continua, $g(x)$ no.

Oss: $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ perché $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$

Questa discontinuità si può eliminare definendo $g(0) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$

E' una funzione continua?

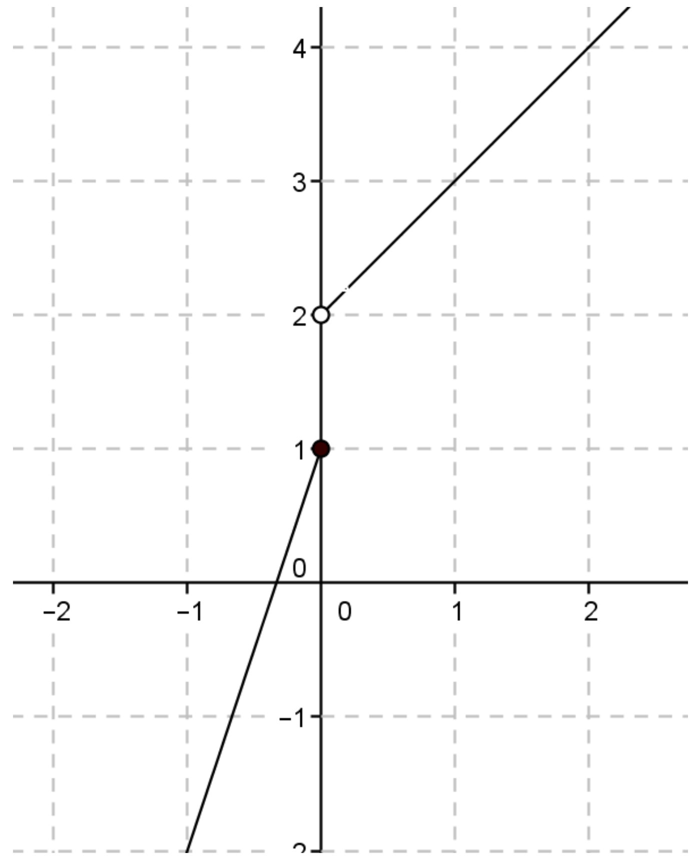
- $f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ se } x > 0 \\ 3x + 1 \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

I limiti destro e sinistro sono diversi, quindi non esiste il limite

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

e si ha un **salto** (discontinuità di prima specie).

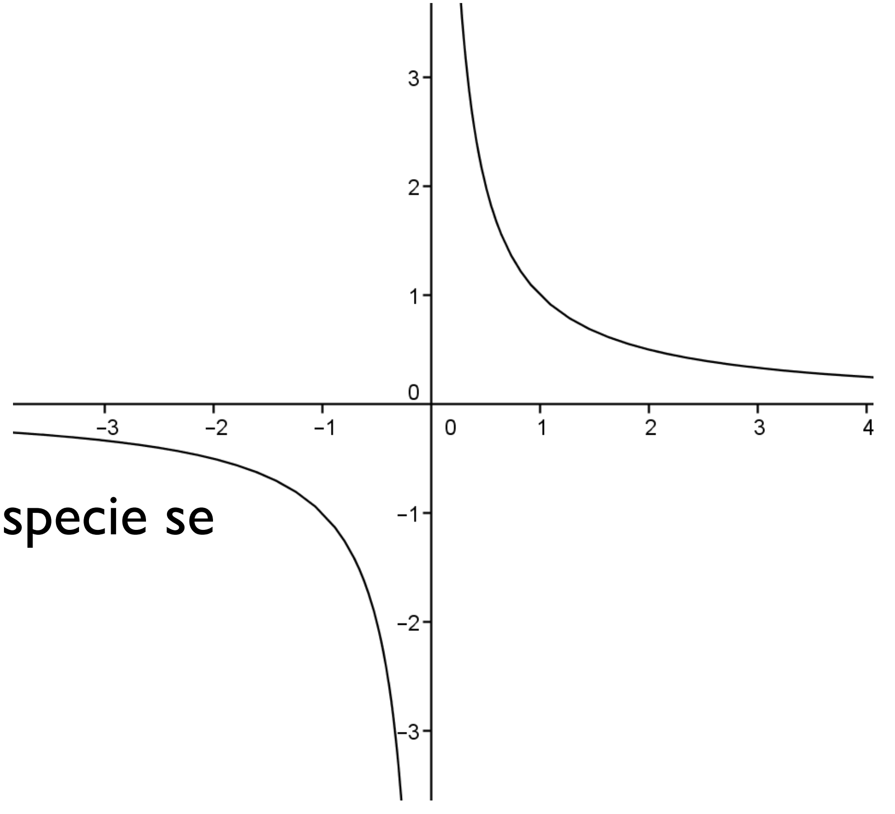


E' una funzione continua?

- $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Entrambi i limiti vanno a $\pm\infty$ e si dice che in $x = 0$ la funzione ha una discontinuità di seconda specie.



Oss: si ha la discontinuità di seconda specie se almeno uno dei due limiti va a $\pm\infty$ o non esiste.

Funzioni Continue, punti di discontinuità

- **Definizione.** Data una funzione di variabile reale in R, e x_0 un punto del dominio (o un estremo del dominio), diciamo che la funzione **f(x)** ha in $\mathbf{x_0}$ **un punto di discontinuità** se si ha

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in R$ e $l \neq f(x_0)$, discontinuità eliminabile

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$, $l_1 \neq l_2$, discontinuità di prima specie (salto)

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ oppure $\lim_{x \to x_0} f(x) = \nexists$ si ha una discontinuità di seconda specie.

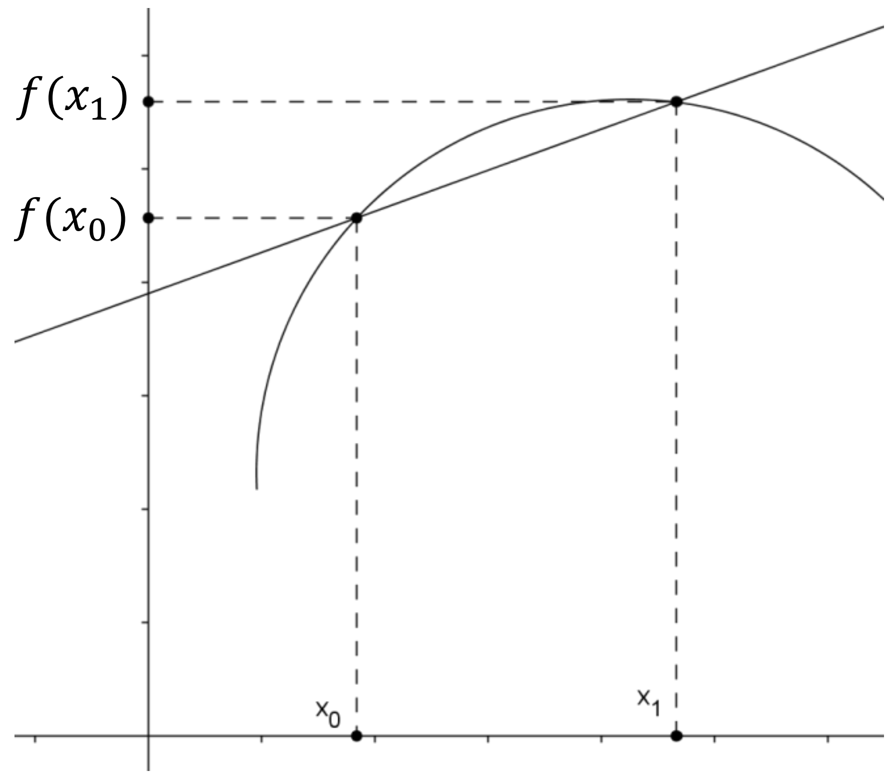
Esercizi

- Dire se le funzioni sono continue nel loro insieme di definizione (dominio), studiare l'andamento agli estremi del dominio e rappresentare queste informazioni nel grafico.
- $f(x) = e^{\frac{2}{1-x}}$
- $f(x) = \frac{1}{x-1}$
- $f(x) = \begin{cases} 1 + \log x, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$

Rapporto incrementale

Rapporto incrementale di una funzione $y = f(x)$, con x_0, x_1 nel dominio di f e $x_0 < x_1$ è

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



e il suo valore è il coefficiente angolare della retta che passa per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

Derivata di una funzione, significato geometrico

- Data una funzione $f(x)$ continua in x_0, la derivata è il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se questo limite esiste ed è finito. La derivata di $f(x)$ in x_0 si indica con $f'(x_0)$ o $\frac{d}{dx} f(x_0)$. Quindi

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se questo limite esiste ed è finito.

Equivalentemente, posto $\Delta x = x - x_0$, si ha $\mathrm{x} = \Delta x + x_0$ e $\Delta x \to 0$ quando $x \to x_0$, quindi

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x}$ se questo limite esiste ed è finito.

- La derivata di una funzione in un punto x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Calcolo di derivate usando la definizione

Definizione:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- $f(x) = b$ (funzione costante) $\quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b-b}{\Delta x} = 0$

- $f(x) = x$ (funzione lineare)

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

- $f(x) = x^2$ (funzione quadratica)

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

Derivata della funzione potenza

- $f(x) = b \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 0$
- $f(x) = x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 1$
- $f(x) = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 2x$

generalizzando:

- $f(x) = x^{\beta} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \beta x^{\beta - 1}$

Es: $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Esercizi: $f(x) = x^{-2}, \;\; f(x) = x^5, \;\; f(x) = \sqrt[4]{x^3}, \;\; f(x) = \frac{1}{x^3}$

Calcolo di derivate usando la definizione

- $f(x) = ax + b$ (funzione lineare)

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x_0 + \Delta x) + b - (ax_0 + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$$

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ (funzione quadratica)

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c - (ax_0^2 + bx_0 + c)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2ax_0 + a\Delta x + b =$$

$$= 2ax_0 + b$$

Derivate

- $f(x) = ax + b$ ha derivata $f'(x) = a$
- $f(x) = ax^2 + bx + c$ ha derivata $f'(x) = a \cdot 2x + b$

Questi risultati sono in accordo con due proprietà delle derivate (che non dimostriamo) e che hanno validità generale:

- derivata di una somma

$$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$$

- derivata di una funzione per una costante

$$\big(c \cdot f(x)\big)' = c \cdot f'(x)$$

Es: $f(x) = 4x^3 - \sqrt{5}x^{-2} \;\Rightarrow\; f'(x) = 4 \cdot 3x^{3-1} - \sqrt{5}(-2)x^{-2-1} =$

$$= 12x^2 + 2\sqrt{5}x^{-3}$$

Esercizi

- Esempi:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[12]{x^7}$$

$$f(x) = 5x^3$$

$$f(x) = 3{,}12x^2 + 5$$

$$f(x) = \sqrt{12}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 4x\ - 2$$

Derivata delle funzioni elementari

La funzione derivata prima associa ad ogni punto di continuità della funzione f, se esiste, il valore della derivata calcolato nel punto

$$f'(x) : x \to f'(x)$$

Date le funzioni elementari, applicando la definizione si possono determinare le seguenti funzioni derivate:

$$(e^x)' = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad (a^x)' = \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$$(\sin x)' = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad (\cos x)' = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$(\ln x)' = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad (\log_a x)' = \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

Derivata del prodotto di funzioni

- Derivata del prodotto:

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Es:

$f(x) = (3x^5 + \sqrt{5}x^{-3})(\cos x + 1) \Rightarrow$

$$f'(x) = \left(3x^5 + \sqrt{5}x^{-3}\right)'(\cos x + 1) + \left(3x^5 + \sqrt{5}x^{-3}\right)(\cos x + 1)' =$$

$$= \left(3\cdot 5x^{5-1} + \sqrt{5}(-3)x^{-3-1}\right)(\cos x + 1) + \left(3x^5 + \sqrt{5}x^{-3}\right)(-\sin x + 0)$$

$$= \left(15x^4 - 3\sqrt{5}x^{-4}\right)(\cos x + 1) - \sin x\left(3x^5 + \sqrt{5}x^{-3}\right)$$

Derivata del rapporto di funzioni

- Derivata del rapporto:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Es:

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$