Lezione 13

1. Siano $A_t = \{x \in R\colon\ tx^2 + x \leq 0, t \in R\}$ e B l'insieme dei numeri reali che sommati a 2 sono maggiori di 5. Determinare, al variare di $t \in R$, l'insieme $B \cap A_t$ e dire se è aperto o chiuso.
2. Determinare dominio e immagine della funzione $f(t) = 100 + 2^t$ e il dominio di $g(t) = \log\left(-\frac{1}{t+1}\right)$.
3. Se $f(t)$ è la legge che descrive il numero di individui di una colonia al tempo t, dove t è il tempo misurato in settimane, quanti sono gli individui inizialmente? E dopo 5 settimane?
4. Uno scalatore posto a 10 metri da una parete verticale misura, grazie a degli appositi strumenti, che l'angolo tra il terreno e la linea che collega i suoi piedi con la cima della parete è di circa 60°. Quanto è alta, in metri, la parete?
5. Siano $A = \left\{a \in R\colon \frac{\sqrt{a-1}+\log^2 a}{a(a^2+1)>0}\right\}$ e $B = \{a \in R\colon \log_2(a+4) < 6\}$. Determinare $B \setminus A$ e dire se è aperto o chiuso.

Lezione 14:

1. Funzioni e traslazioni
2. Funzioni definite a tratti
3. Ancora sulle disequazioni logaritmiche ed esponenziali

1. Funzioni e Traslazioni

Sia data la funzione $f(x)$ e sia noto il suo grafico, allora

- Il grafico di $f(x) + y_0$ si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ verso l'alto di y_0 unità
- Il grafico di $f(x) - y_0$ si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ verso il basso di y_0 unità
- Il grafico di $f(x - x_0)$ si ottiene traslando verso destra il grafico di $f(x)$
- Il grafico di $f(x + x_0)$ si ottiene traslando verso sinistra il grafico di $f(x)$

Esempi: Determinare Dominio e Immagine delle seguenti funzioni:

$f(x) = x^2$ $\quad$ $f(x) = x^2 - 3$ $\quad$ $f(x) = (x-3)^2$

$f(x) = 3^x$ $\quad$ $f(x) = 3^x + 2$ $\quad$ $f(x) = 3^{x+2}$

$f(x) = \log_2 x$ $\quad$ $f(x) = \log_2 x - 2$ $\quad$ $f(x) = \log_2(x-2)$

2. Funzioni definite a tratti

Disegnare i grafici delle seguenti funzioni e determinare l'immagine delle funzioni dal grafico.

- $f(x) = \begin{cases} x-2 & se\ x \geq 4 \\ x^2-3 & se\ x < 4 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ 3 & se\ x < 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} -2 & se\ x \leq 1 \\ \log x & se\ x > 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} e^x+1 & se\ x > 0 \\ 5 & x = 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$

3. Ancora sulle disequazioni logaritmiche ed esponenziali

- Sia $p(t) = 20 + e^{3t}$ la legge che descrive la numerosità di una popolazione al variare del tempo t misurato in mesi.

1. Dopo quanto tempo la popolazione raggiunge gli 80 esemplari?
2. Dopo quanto tempo la popolazione supererà i 450 esemplari?

Ris:

1. $20 + e^{3t} = 80 \qquad \Rightarrow \qquad t \approx 1{,}36$

2. $20 + e^{3t} > 450 \qquad \Rightarrow \qquad t > 2$

3. Ancora sulle disequazioni logaritmiche ed esponenziali

- Sia $T(t) = \log_2(t+1) + 20$ la legge che descrive la variazione di temperatura in un ambiente in un periodo di tempo $t \in [0,60]$ minuti.

1. Qual è la temperatura inziale?
2. Dopo quanto tempo la temperatura raggiunge i 22 gradi?

Ris:

1. $T(0) = \log_2(0+1) + 20 = 20$

2. $\log_2(t+1) + 20 = 22 \quad \Rightarrow \quad t = 3$