

Integrali

- ▶ Integrale definito e area con segno
- ▶ Primitiva di una funzione e integrale indefinito
- ▶ Teorema fondamentale del calcolo integrale
- ▶ Calcolo di aree
- ▶ Metodi di integrazione: per parti e per sostituzione



Calcolare l'area di una regione piana

- Sia $f(x)$ una funzione positiva e continua definita nell'intervallo $[a, b]$.
L'area della regione piana delimitata dal grafico della funzione, dall'asse delle x e dalle rette $x = a$ e $x = b$ si ottiene come

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^- = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^+ = A$$

dove A_n è detta somma di Cauchy e A_n^- e A_n^+ sono le somme di Riemann.

Definizione: Il valore A si chiama integrale definito della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ e si indica con

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

a e b sono detti estremo inferiore e superiore di integrazione, f è detta funzione integranda.



Primitiva di una funzione

Definizione:

Data una funzione $f(x)$, la funzione $F(x)$ è detta primitiva di $f(x)$ se in tutti i punti del suo dominio è soddisfatta l'uguaglianza

$$F'(x) = f(x)$$

- ▶ Teorema: Se $F(x)$ è primitiva di $f(x)$, anche $F(x) + c, \forall c \in \mathbb{R}$, è primitiva di $f(x)$.

Dimostrazione: si ha infatti $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$

- ▶ Quante sono quindi le primitive di $f(x)$?



Primitiva di una funzione di variabile reale

Esempi

Una primitiva di $f(x) = x^4$ è $F(x) = \frac{x^5}{5}$

Infatti essendo $g'(x) = (\alpha x^\beta)' = \frac{d}{dx}(\alpha x^\beta) = \alpha \beta x^{\beta-1}$

si ha $F'(x) = \left(\frac{x^5}{5} + c\right)' = 5 \frac{1}{5} x^{5-1} = x^4$

In generale, una primitiva di $f(x) = x^\alpha$ è $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Lo si verifichi per esercizio.

Si calcoli poi la primitiva di $f(x) = 4x^8$



Primitiva di una funzione di variabile reale

Esempi.

Ricordando che: $(e^x)' = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ $(\ln x)' = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

$$(\sin x)' = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

calcolare le primitive delle funzioni:

$$f_1(x) = e^x \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad f_3(x) = \cos x$$

Primitive:

$$F_1(x) = e^x + c$$

$$F_2(x) = \ln|x| + c$$

$$F_3(x) = \sin x + c$$



Teorema fondamentale del calcolo integrale

► Teorema:

Data una funzione $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $[a, b]$, la funzione

$$A(x) = \int_a^x f(z) dz$$

è primitiva di $f(x)$ nel punto x e si ha $A'(x) = f(x)$

► Conseguenza

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, definita nell'intervallo $[a, b]$, allora l'integrale definito è dato da

$$\int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a)$$



Dimostrazione del Teorema

Per dimostrare il teorema consideriamo le due seguenti proprietà dell'integrale.

Data $f(x)$, definita e continua nell'intervallo $[a, b]$

1. se $c \in (a, b)$, si ha

$$\int_a^b f(z)dz = \int_a^c f(z)dz + \int_c^b f(z)dz$$

2. se M e m sono rispettivamente il massimo e il minimo di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, allora

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(z)dz \leq M(b - a)$$



Dimostrazione

- Per dimostrare il teorema dobbiamo mostrare che vale l'uguaglianza

$$A'(x) = f(x)$$

Dobbiamo quindi costruire il rapporto incrementale per la $F(x)$ e calcolare il limite. Consideriamo un incremento h e scriviamo $A(x + h)$ utilizzando la proprietà 1

$$A(x + h) = \int_a^{x+h} f(z) dz = \int_a^x f(z) dz + \int_x^{x+h} f(z) dz$$

Il rapporto incrementale è
$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h}$$

e vogliamo dimostrare che
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$



Dimostrazione

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(z) dz - \int_a^x f(z) dz}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(z) dz}{h}$$

utilizzando la proprietà 2, nell'intervallo $[x, x+h]$ di ampiezza h , si ha

$$h \cdot \min_{z \in [x, x+h]} f(z) \leq \int_x^{x+h} f(z) dz \leq h \cdot \max_{z \in [x, x+h]} f(z)$$

dividendo per $h > 0$, e calcolando il limite per $h \rightarrow 0$, poiché il massimo e il minimo di $f(x)$ nell'intervallo $[x, x+h]$ tendono a $f(x)$ per $h \rightarrow 0$, si ha

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\min_{z \in [x, x+h]} f(z) \right) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(z) dz}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{z \in [x, x+h]} f(z) \right) = f(x)$$

dimostrando che
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(z) dz}{h} = f(x).$$



Dimostrazione della conseguenza

Essendo $A(x) = \int_a^x f(z)dz$ una primitiva di $f(x)$, allora anche

$F(x) = A(x) + c$ è una sua primitiva.

$$A(b) = \int_a^b f(z)dz \qquad A(a) = \int_a^a f(z)dz = 0$$

Inoltre $F(b) = A(b) + c$ e $F(a) = A(a) + c = c$, quindi

$$\int_a^b f(z)dz = A(b) = F(b) - c = F(b) - F(a)$$



Esempi

- ▶ Data la funzione $f(x) = x$, si calcoli una primitiva e l'area della regione di piano racchiusa tra il grafico della funzione, l'asse delle x e le rette di equazione $x = 0$ e $x = 1$.

$$\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

- ▶ Calcolare l'area del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$



Integrale Indefinito

- ▶ Data una funzione $f(x)$ definita e continua su $\mathbb{R}$, **l'insieme delle primitive** indicata con

$$F(x) + c = \int f(x)dx$$

prende il nome di **integrale indefinito** della funzione $f(x)$.

- ▶ Esercizio: Date le funzioni considerate nell'intervallo assegnato, calcolarne una primitiva, l'integrale indefinito, l'integrale definito e determinare l'area della regione chiusa individuata dal grafico della funzione, dall'asse delle x e dalle rette parallele all'asse y passanti per gli estremi dell'intervallo.

$$f(x) = e^x \text{ nell'intervallo } \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$$

$$g(x) = x^3 \text{ nell'intervallo } [1, \sqrt{2}]$$



Integrali elementari

Per le seguenti funzioni continue, valgono le formule, dove c è una costante arbitraria

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{per } n \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + c$$



Integrale definito e area con segno

Attenzione!

L'integrale definito determina l'area con segno! Si considerino per esempio:

$$\int_1^4 -x \, dx \quad \int_{-\pi/2}^0 \sin x \, dx \quad \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \, dx$$



Proprietà degli integrali

Date due funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ e una costante c , si ha

- ▶ $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- ▶ $\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x)dx$

Le stesse proprietà valgono per gli integrali definiti, in particolare si ha

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x)dx$$

- ▶ **Media di una funzione:** data f continua in un intervallo $[a, b]$ si definisce media della funzione il numero

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Significato geometrico: esiste rettangolo equivalente al trapezoide

$$(b-a)\bar{f} = \int_a^b f(x) dx$$



Esempio

- ▶ La numerosità di una coltura di batteri varia con la legge

$$N(t) = 10^6 e^{t/2}$$

con t calcolato in ore. Determinare la numerosità media nell'intervallo di tempo $[0,1]$.

$$\bar{N} = \frac{1}{10} \int_0^{10} 10^6 e^{t/2} dt \simeq 3 \cdot 10^7$$



Esercizi

- Determinare, nel semipiano $x \geq 0$, l'area della regione di piano racchiusa tra i grafici delle funzioni $f(x) = 5 - 2x$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$ e l'asse delle y .

$$\int_0^2 (f(x) - g(x))dx = \int_0^2 5 - 2x - (x^2 - 2x + 1)dx = \frac{16}{3}$$

- Calcolare l'area della regione di piano delimitata dai grafici delle funzioni $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ e $g(x) = -\frac{1}{2}$ per $x \in [0, 4\pi]$.



Metodi di integrazione

Integrazione per parti:

Dal teorema fondamentale e dalla regola di derivazione del prodotto si ha la seguente formula di integrazione per parti:

- Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ e $G(x)$ una primitiva di $g(x)$

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx$$

Esempio

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot (\ln x) \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= x \ln x - \int 1 \, dx = (x \ln x - x) + c \end{aligned}$$



Differenziale di una funzione

- Definiamo il **differenziale** di $f(x)$, indicato con df (variazione infinitesima di f)

$$df = df(x) = f'(x)dx$$

Cioè la variazione infinitesima df è proporzionale all'incremento infinitesimo dx

Il coefficiente di proporzionalità è la derivata prima nel punto x .

Esempio: $f(x) = e^{5x}$, $df = 5e^{5x}dx$



Metodi di integrazione

Metodo di integrazione per sostituzione

Il metodo si applica se non è immediato calcolare l'integrale di $f(x)$ e se si può trovare una variabile ausiliaria z legata ad x dalla relazione $x = g(z)$

Si calcola il differenziale dx e si sostituisce nell'integrale la nuova variabile z e il dx espresso in termini della nuova variabile z

Se l'integrale ottenuto è più elementare si calcola

$$\int f(x)dx = \int f(g(z)) \cdot g'(z)dz$$

Calcolata la primitiva otteniamo una funzione di z , che dobbiamo ricondurre alla variabile x



Esempio

Calcolare $\int \cos(5x - 1) dx$

posto $z = (5x - 1)$ da cui $x = g(z) = \frac{z+1}{5}$

ci serve $dx = g'(z)dz = \frac{1}{5} dz$

$$\int f(g(z)) \cdot g'(z) dz = \int \cos z \cdot \frac{1}{5} dz = \frac{1}{5} \int \cos z dz = \frac{1}{5} \sin z + c =$$

$$= \frac{1}{5} \sin(5x - 1) + c$$



Metodi di integrazione

Il metodo di integrazione per sostituzione consente di determinare l'integrale di semplici funzioni composte delle funzioni elementari

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{per } n \neq -1 \quad \int (f(x))^n f'(x) dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int x^{-1} dx = \ln |x| + c \quad \int (f(x))^{-1} f'(x) dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

Esempi

$$\int (3x^2 - x + 2)^2 (6x - 1) dx = \int (3x^2 - x + 2)^2 (6x - 1) dx = \frac{(3x^2 - x + 2)^3}{3} + c$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-(\sin x)}{\cos x} dx = - \ln |\cos x| + c$$



Esercizi

- ▶ Calcolare l'area della regione compresa tra l'asse delle x , il grafico di $f(x) = \sin x$, e le rette di equazione $x = -\pi$ e $x = \pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0$$

L'integrale definito è zero. Funzione dispari.
Gli estremi di integrazione sono opposti.
Quanto vale l'area della regione?

$$Area = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \, dx = \int_{-\pi}^0 -\sin x \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -(-\cos x) \Big|_{-\pi}^0 + (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = 4$$

- ▶ Calcolare l'area della regione compresa tra l'asse delle x , il grafico di $f(x) = \cos x$, e le rette di equazione $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

