Equazioni differenziali

- Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine:
  - Equazioni del tipo $x'(t) = f(t)$
  - Equazioni lineari del tipo $x'(t) + ax(t) = b$
  - Equazioni a variabili separabili del tipo $x'(t) = g(t) \cdot h(x(t))$
  - Equazioni lineari del tipo $x' + a(t)x(t) = b(t)$

Equazioni differenziali

Un’equazione differenziale è un’equazione che ha per incognita una funzione $x = x(t)$ e che stabilisce una relazione tra la variabile indipendente t, la funzione x e almeno una delle sue derivate $(x', x'', \ldots)$.

$x'(t) = 3x(t) + 2$	$x' = 3x + 2$
$x'(t) = (3t + 1)x(t) + 21$	$x' = (3t + 1)x + 21$
$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 3t^2$	$x'' + 3x' + 2x = 3t^2$

(spesso non si indica esplicitamente la dipendenza dalla variabile indipendente)

Esempio

Una persona cammina lungo una strada rettilinea con velocità costante $v = 1{,}1 m/s$. Sapendo che all'istante iniziale si trova 10 metri più avanti di un incrocio (che possiamo prendere come origine), a che distanza dall'origine si troverà dopo 5 secondi?

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = 1{,}1$$

$x'(t) = 1{,}1$ Equazione differenziale

Risolvere l'equazione differenziale vuol dire trovare la funzione $x(t)$ che verifica $x'(t) = 1{,}1$

$$\int x'(t)dt = \int 1{,}1 dt \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x(t) = 1{,}1t + c}$$

Soluzione generale

Esempio

Per trovare la soluzione particolare relativa al fatto che all'istante iniziale si trova a 10 metri dell'incrocio, aggiungiamo la condizione iniziale:

$$x(0) = 10$$

quindi da $x(t) = 1{,}1t + c$ si ha $x(0) = 1{,}1 \cdot 0 + c = 10 \Rightarrow c = 10$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x(t) = 1{,}1t + 10} \longleftarrow \text{Soluzione particolare}$$

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = 1{,}1 \\ x(0) = 10 \end{cases} \quad \text{si chiama Problema di Cauchy}}$$

Quindi la distanza dall'origine dopo 5 secondi è

$$x(5) = 1{,}1 \cdot 5 + 10 = 15{,}5\, m$$

Natura differenziale del modello di Malthus

Legge di crescita Malthusiana $N(t) = R^t N_0$

posto $a = \ln R$, la legge diventa $N(t) = e^{at} N_0$

la sua derivata è $N'(t) = a e^{at} N_0$ e quindi

$$\boldsymbol{N'(t) = aN(t)}$$

che è un'equazione differenziale.

coeff. a: tasso istantaneo di crescita per unità di popolazione, ovvero $a = n - m$ (nati meno morti) .

- La legge $N(t) = N_0 R^t = \mathrm{N_0 e^{at}}$ risolve due problemi distinti:

s.d.d. $\begin{cases} N(t) = RN(t-1) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$ e.d.o. $\begin{cases} N'(t) = aN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$

che differiscono per il fatto che nel primo si considerano tempi discreti, nel secondo tempi continui.

Definizioni

- Un'equazione differenziale ordinaria (o.d.e.) del tipo

$$x'(t) = f(x(t))$$

è un' e.d.o. del **primo ordine** (perché compare solo la derivata prima di $x(t)$) nella funzione incognita $x(t)$.

Una soluzione è una funzione $\varphi(t)$ che, $\forall t$, verifica l'identità $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$.

- L'e.d.o. del primo ordine

$$x'(t) = ax(t)$$

è un'equazione **lineare omogenea** (non c'è il termine noto) a e la sua soluzione generale è

$$x(t) = ce^{at}$$

dove c è una costante (si determina se si ha la condizione iniziale).

Definizioni

- Se all'equazione differenziale si aggiunge la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$, si ha un **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- Caso particolare:

$$\begin{cases} x'(t) = a \cdot x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Esempio: Decadimento radioattivo

- Sia $M(t)$ la massa di un isotopo radioattivo e $-a$ il tasso istantaneo di decadimento per unità di massa.

  Quindi $M(t)$ verifica l'e.d.o.

$$M'(t) = -aM(t).$$

Qual è la soluzione se $M(0) = 4$?

o.d.e. del primo ordine lineare non omogenea

Si consideri il modello di Malthus con immissione o prelievo costante ($b > 0$ o $b < 0$) e $a \neq 0$ e popolazione iniziale N_0

$\Rightarrow$ la popolazione varia per cause interne e esterne.

$$\begin{cases} N'(t) = aN(t) + b \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Dimostriamo che la legge che descrive la variazione della popolazione nel tempo è

$$N(t) = N_0 e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)$$

o equivalentemente

$$N(t) = \left(N_0 + \frac{b}{a}\right) e^{at} - \frac{b}{a}$$

Dimostrazione

Si scriva $aN(t)+b=a\left(N(t)+\frac{b}{a}\right)$, poiché $\left(N(t)+\frac{b}{a}\right)'=N'(t)$ possiamo dire che

$$\left(N(t)+\frac{b}{a}\right)'=a\left(N(t)+\frac{b}{a}\right)$$

essendo un'e.d.o. lineare omogenea (del tipo $x'(t)=ax(t)$), ha soluzione

$$x(t)=ce^{at}$$

e quindi $\quad N(t)+\frac{b}{a}=c\mathrm{e}^{\mathrm{at}} \quad \Rightarrow \boldsymbol{N(t)=ce^{at}-\frac{b}{a}}$

Essendo $N(0)=N_0 \quad \Rightarrow ce^{a0}-\frac{b}{a}=N_0$ da cui $c=N_0+\frac{b}{a}$

$$N(t)=\left(N_0+\frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{at}}-\frac{b}{a}$$

Esercizi

Si risolvano

- $\begin{cases} p'(x) = -4 \\ p(2) = 3 \end{cases}$

- $\begin{cases} p'(x) = 3 \\ p(2) = 1 \end{cases}$

- $\begin{cases} p'(x) = -4p(x) + 2 \\ p(0) = 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} p'(x) = -4p(x) + 2 \\ p(0) = 2 \end{cases}$

Equazioni differenziali a variabili separabili

- Siano f(x) e g(t) due funzioni note. L'e.d.o.

$$x'(t) = g(t)f(x)$$

si dice a variabili separabili perché, in termini differenziali, si scrive

$$\frac{dx}{dt} = g(t)f(x) \Rightarrow \frac{dx}{f(x)} = g(t)dt$$

Quindi calcolando gli integrali

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t)dt$$

si ottiene la soluzione.

Esempio 1

- Modello di Malthus con tasso di crescita istantaneo a costante

$$N' = aN \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = aN \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{N} = a \cdot dt$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dN}{N} = \int a \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \ln(N) = at + k\,, k = cost$$

$$\Rightarrow \quad N = e^{at+k} \quad \Rightarrow \quad N = e^{at}e^{k}$$

ed essendo e^k una costante che possiamo chiamare c, si ha la soluzione che già conosciamo

$$N = ce^{at}$$

Esempio 2

- Modello di Malthus con tasso di crescita istantaneo $a(t)$ variabile

$$N' = a(t)N \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = a(t)N \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{N} = a(t)dt$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dN}{N} = \int a(t)dt \quad \Rightarrow \quad \ln|N| = \int a(t)dt$$

(essendo $N \geq 0$ togliamo il valore assoluto) $\qquad \ln N = \int a(t)dt$

Esempio:

$$N' = \cos t \cdot N$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int \cos t \, dt \quad \Rightarrow \quad \ln(N) = \sin t + k, k = costante$$

$$N = e^{\sin t + k} \quad \Rightarrow \quad N = ce^{\sin t}$$

Esempio 3

- Legge della fluidodinamica che descrive la fuoriuscita di un fluido da un rubinetto posto nella parte bassa del recipiente, e dove $h(t)$ descrive l'altezza del fluido nel recipiente
$$h'(t) = -\sqrt{2gh(t)}$$

Quindi diventa

$$h' = -\sqrt{2g}\sqrt{h} \;\Rightarrow\; \frac{h'}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g} \;\Rightarrow\; \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g}dt$$

$$\int h^{-\frac{1}{2}}\,dh = \int -\sqrt{2g}\,dt \;\Rightarrow\; \frac{h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2g}t + c \;\Rightarrow$$

$$2\sqrt{h} = -\sqrt{2g}t + c \;\Rightarrow\; h(t) = \left(\frac{-\sqrt{2g}t + c}{2}\right)^2$$

Esempio 3

- Considerando come condizione iniziale che $h(0) = h_0$ (come si interpreta questa formula?)

$$\begin{cases} h'(t) = -\sqrt{2gh(t)} \\ h(0) = h(0) \end{cases}$$

si ha

$$h(t) = \left(\frac{-\sqrt{2g}t+c}{2}\right)^2 \quad \text{e quindi} \quad h(0) = \left(\frac{c}{2}\right)^2 = h_0 \ \Rightarrow c = 2\sqrt{h_0}$$

La soluzione particolare perciò è

$$h(t) = \left(\frac{-\sqrt{2g}t + 2\sqrt{h_0}}{2}\right)^2$$

Dopo quanto tempo il recipiente si svuota? (Fare una considerazione sull'altezza del fluido)

Esercizi sulle o.d.e. a variabili separabili

1. $y'(x) = 4xy^2(x)$
2. $3y^2(x)y'(x) = x + 1$
3. $\sin t + 3x(t)x'(t) - 2 = 0$
4. $x' = \frac{\cos t}{4x}$
5. $\frac{y'}{x} = 1 + y$
6. $y' = e^{x-y}$

Usare le precedenti equazioni differenziali per risolvere i problemi di Cauchy con condizione iniziale

- $y(0) = 1$ per le e.d.o. $3, 4, 6$
- $y(1) = 0$ per le e.d.o. $1, 2, 5$

e.d.o. lineari del primo ordine

Sono le e.d.o. del tipo

$x'(t) = a(t)x(t) + b(x)$ o anche $x' = a(t)x + b(t)$

qual è la soluzione?

Iniziamo da quelle omogenee, ovvero con $b(x) = 0$

$$x'(t) = a(t)x(t)$$

Essendo a variabili separabili si ha:

$$\frac{x'}{x} = a(t) \Rightarrow \frac{dx}{x} = a(t)dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int a(t)dt$$

$$\Rightarrow \ln|x| + k = \int a(t)dt \Rightarrow \ln|x| = -k + \int a(t)dt$$

$$|x| = e^{-k+\int a(t)dt} \Rightarrow x = \pm e^{-k} e^{\int a(t)dt} = ce^{\int a(t)dt}$$

Esempio

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 y(x) \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

$$y = ce^{\int x^2 dx} \quad \Rightarrow \quad y = ce^{\frac{x^3}{3}} \quad \Rightarrow$$

$$y(2) = ce^{\frac{2^3}{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{e^{\frac{8}{3}}} \Rightarrow e^{-\frac{8}{3}} \quad \Rightarrow$$

$$y = e^{-\frac{8}{3}} e^{\frac{x^3}{3}} \quad \Rightarrow \quad y = e^{\frac{x^3 - 8}{3}}$$

e.d.o. lineari del primo ordine

- Studiamo ora le e.d.o. complete (non omogenee)

$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ o anche $x' = a(t)x + b(t)$ (1)

Supponiamo che la costante c della soluzione dell'e.d.o. omogenea associata $x' = a(t)x$ non sia più una costante ma una funzione di t, ovvero

$$x = c(t)e^{\int a(t)dt}$$

Affinché questa sia soluzione della (1), sostituendo nella (1) x e x' deve aversi un'uguaglianza. Essendo

$$x'(t) = c'(t)e^{\int a(t)dt} + c(t)a(t)e^{\int a(t)dt} \Rightarrow$$

$$c'(t)e^{\int a(t)dt} + c(t)a(t)e^{\int a(t)dt} = a(t)c(t)e^{\int a(t)dt} + b(t) \Rightarrow$$

$$c'(t)e^{\int a(t)dt} = b(t) \;\Rightarrow\; c'(t) = b(t)e^{-\int a(t)dt} \;\Rightarrow$$

$$c(t) = \int b(t)\, e^{-\int a(t)dt} dt + k$$

e.d.o. lineari del primo ordine

$$c(t) = \int b(t)\, e^{-\int a(t)dt} dt + k$$

sostituendo quindi il valore di $c(t)$ nella soluzione

$$x = c(t) e^{\int a(t)dt}$$

si ha la soluzione generale:

$$\boldsymbol{x = e^{\int a(t)dt} \left(\int b(t)\, e^{-\int a(t)dt} dt + k \right)}$$

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

- $x' = -\frac{x}{t} + 7t\sqrt{t}$
- $x' + 3t^2x = t^2$
- $y' = -\frac{y}{x} + x$
- $y' = 2xy + 2x$
- $y' - 3xy - 4x = 0$
- $\begin{cases} y' + y - 3x = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} y' - x^2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x' + t = e^t - 1 \\ x(1) = 1 \end{cases}$