Les surfaces minimales d'indice fini dans les 3-variétés

Abdelkader Bouyakoub

En 1985 Fischer-Colbrie a démontré que si N est une variété riemannienne de dimension 3 dont la courbure scalaire est positive et si M est une surface orientée complète et minimale dans N dont l'indice de stabilité est fini alors M est homéomorphe à une surface compacte de genre fini, privée d'un nombre fini de points. Notre propos est de montrer que ce résultat subsiste même si l'espace ambiant N a une courbure scalaire dont la borne inférieure, éventuellement négative, est finie. On dégage ensuite quelques observations qui mettent en évidence le lien étroit qui existe entre la stabilité ou, plus précisément entre la première valeur propre de l'opérateur de Jacobi associé à la situation et la borne inférieure de la courbure de Ricci de l'espace ambiant N. Ainsi la finitude de l'indice dans ce cas implique celle de l'intégrale du carré de la norme de la seconde forme fondamentale de M. Cela représente, en un certain sens, une extension partielle du théorème de Fischer-Colbrie, Gulliver et Lawson. Les conclusions obtenues sont, par exemple, valides dans tout espace homogène de dimension 3. Un théorème de Shoen-Yau sur les surfaces fermées, orientées, minimales et stables dans les 3-variétés à courbure scalaire positive est aussi déduit de ces calculs.