Matrices de conférence complexes, matrices de Hadamard complexes et repères équiangulaires de *redondance* 2

B.Et – Taoui Mulhouse

Résumé : Soit E un espace préhilbertien réel ou complexe. On dit que $F = \{f_i\}_{i \in I} \subset E$ est un *repère* (ou *frame) de* E lorsqu'il existe deux constantes C , $D > 0$ telles que $\forall x \in E, C \left\| x \right\|^2 \leq \sum_{i \in I} \left| \langle x, f_i \rangle \right|^2 \leq D \left\| x \right\|^2$. Les frames normalisés et tight ou de Parseval ($C = D = 1$) réels et complexes uniformes ($\forall i, \|f_i\| = Cste$) et équiangulaires ($\forall i \neq j, |\langle f_i, f_j \rangle| = Cste$) ont été largement étudiés pendant cette dernière décennie pour leurs applications dans la théorie du codage ainsi que dans la théorie quantique de l'information. Des repères de Parseval uniformes et équiangulaires constitués de n vecteurs de $E = \mathbb{R}^k$ ou $\mathbb{C}^k$ seront appelés des (n, k) *ETFs.* le rapport $\frac{n}{k}$ est appelé *la redondance* du frame. Il est connu que le problème d'existence de $CETFs$ est équivalent au problème d'existence d'un certain type de matrices carrées, appelées matrices de Seidel, ayant deux valeurs propres. Une matrice carrée Q est une matrice de Seidel lorsqu'elle est hermitienne de diagonale nulle et dont les autres coefficients sont des complexes de module 1. Une matrice complexe C d'ordre n est appelée matrice de conférence complexe lorsqu'elle a un diagonale nulle, les autres coefficients des complexes de module 1 et vérifiant $CC^* = (n-1)I_n$. Les matrices de conférence complexes sont importantes pour la construction des matrices de Hadamard complexes. Une matrice de Hadamard complexe H est une matrice carrée d'ordre n de coefficients des complexes de module 1 et vérifiant $HH^* = nI_n$. les matrices de Hadamard complexes ont des applications importantes en algèbre commutative, en théorie des opérateurs ainsi qu'en analyse harmonique.

On montrera dans cet exposé que pour tout k impair tel que $2k = p^\alpha + 1$, p premier $\alpha \in \mathbf{N}^*$ il existe une famille de matrices de conférence complexes d'ordre $2k$ dépendant de deux paramètres a et b des complexes de module 1. Par une construction par blocs on en déduit l'existence d'une famille infinie dépendant de a et b, de matrices de Hadamard complexes hermitiennes d'ordre $16k^2$ et ayant une diagonale de 1. Il en découle alors l'existence d'un $(16k^2, 2k(4k+1))$ *CETFs.* En prenant $a = \pm 1$ et b un complexe quelconque de module 1 les matrices de conférence sont alors hermitiennes et sont donc des matrices de Seidel. Ce qui entraîne d'une part l'existence d'une famille infinie de $(2k, k)$ CETFs et d'autre part l'existence d'une famille infinie de $(4k^2, k(2k+1))$ *CETFs*, dépendant d'un paramètre b un complexe de module 1. On concluera entre autre par la construction pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^*$ d'un $((2k)^{2^\alpha}, \frac{(2k)^{2^{\alpha-1}}((2k)^{2^{\alpha-1}}+1)}{2})$ *CETFs* dont la redondance est le terme général d'une suite numérique convergente de limite 2.